

1^{ère} partie
Production
de la vapeur



2^{ème} partie
Utilisation
de la vapeur

3^{ème} partie
Production
de glace

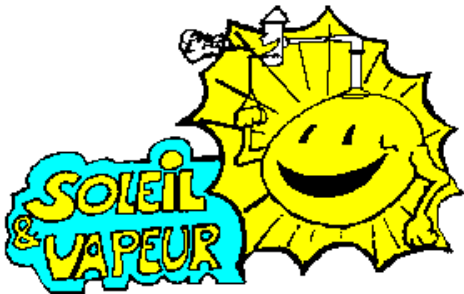
4^{ème} partie
Memento
technologique

5^{ème} partie
vers d'autres
horizons

1^{ère} partie Liste des chapitres

- ▶ Chap I – Dossier de calculs
- Chap II – Conception du capteur
- Chap III – Etude du capteur
- Chap IV – Etude du circuit de production de vapeur
- Chap V – Construction du capteur et du circuit de vapeur
- Chap VI – Installation, Conduite, Performances, Maintenance
- Chap VII – La malle pédagogique
- Chap VIII – Plans informatiques

Chapitre I DOSSIER DE CALCULS



Association **SOLEIL & VAPEUR**

Dossier de calculs réalisé par René RAUD

SOMMAIRE

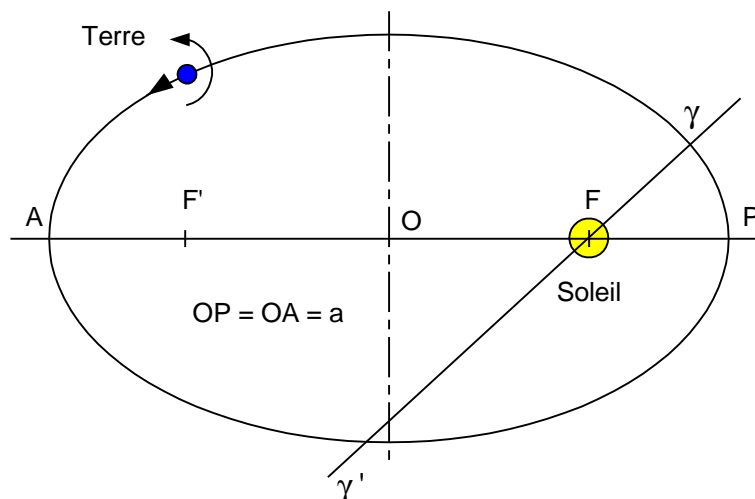
NOTIONS D'ASTRONOMIE	3
1.1 GENERALITES - DEFINITIONS	3
1.2 LES LOIS DE KEPLER	5
1.2.1 Première loi : loi des orbites.....	5
1.2.2 Seconde loi : loi des aires	5
1.2.3 Troisième loi : loi des périodes.....	5
1.3 LES REPERES	6
1.3.1 Systèmes de coordonnées célestes.....	6
1.3.1.1 Coordonnées écliptiques	6
1.3.1.2 Coordonnées équatoriales	7
1.3.1.3 Coordonnées cartésiennes	7
1.3.1.4 Changement de coordonnées	8
1.3.2 Systèmes de coordonnées rattachées à la terre	8
1.3.2.1 Coordonnées géographiques	8
1.3.2.2 Coordonnées horizontales	9
1.3.2.3 Coordonnées horaires.....	9
1.4 LE TEMPS	11

1.4.1	<i>Le temps solaire vrai (TSV)</i>	11
1.4.2	<i>Le temps solaire moyen (TM)</i>	11
1.4.3	<i>Le temps moyen de Greenwich (GMT)</i>	11
1.4.4	<i>Le temps universel (TU)</i>	122
1.4.5	<i>Le temps des éphémérides (TE)</i>	12
1.4.6	<i>Le temps sidéral (TS)</i>	12
1.4.7	<i>Calcul du temps sidéral</i>	13
1.5	CALCULS DE BASE	15
1.5.1	<i>Calcul des coordonnées écliptiques héliocentriques</i>	15
1.5.2	<i>Calcul de la longitude vraie du soleil</i>	16
1.5.3	<i>Calcul de la déclinaison et de l'ascension droite du soleil</i>	17
1.5.4	<i>Calcul des coordonnées horizontales du soleil</i>	17
1.5.5	<i>Course du soleil dans le ciel</i>	18
2	CALCULS DE DEFINITION DU CAPTEUR	21
2.1	PRESENTATION SOMMAIRE DU CAPTEUR	21
2.2	LE CONCENTRATEUR PARABOLIQUE COMPOSE	22
2.2.1	<i>Définition du CPC</i>	22
2.2.2	<i>Equations du CPC</i>	22
2.2.2.1	Calcul de la largeur de la pupille de sortie $FB = d2$	23
2.2.2.2	Calcul des coordonnées du point M dans le repère (XFY1)	23
2.2.2.3	Calcul des coordonnées du point M dans le repère (XIY)	23
2.2.2.4	Calcul de l'angle ϕ pour le point C (ϕ_c)	23
2.2.2.5	Coordonnées du point C dans le repère (XIY).....	24
2.2.2.6	Hauteur du CPC	24
2.2.3	<i>Considérations géométriques</i>	25
2.2.4	<i>Réduction de la hauteur</i>	26
2.3	LE MIROIR CYLINDRO-PARABOLIQUE	27
2.3.1	<i>Définitions</i>	27
2.3.2	<i>Calculs de base sur la parabole</i>	27
2.3.2.1	Calcul de la longueur d'un arc de parabole	27
2.3.2.2	Calcul de l'angle au sommet	28
2.3.2.3	Calcul de la distance d'un point de la parabole au foyer.....	29
2.3.3	<i>Calculs du suivi du soleil</i>	29
2.3.3.1	Calcul de l'angle de réglage	30
2.3.3.2	Calcul de l'angle d'incidence	31
2.3.3.3	Calcul de la longueur du rayon réfléchi	33
2.3.4	<i>Calculs relatifs à la tache focale</i>	34
2.3.4.1	Calcul de la largeur de la tache focale à midi	34
2.3.4.2	Angle qui minimise la largeur de la tache focale à midi.....	36
2.3.4.3	Calcul de la largeur maximale de la tache focale.....	38
2.3.4.4	Angle qui minimise la largeur de la tache focale en dehors de midi	39
2.3.4.5	Choix de construction	40
2.3.5	<i>Calculs sur la défocalisation des rayons</i>	42
2.3.5.1	Calcul des rayons réfléchis	43
2.3.5.2	Calcul du déplacement de la tache solaire pour un dépointage donné.....	47
2.3.5.3	Géométrie de la défocalisation	49

1 NOTIONS D'ASTRONOMIE

1.1 GENERALITES - DEFINITIONS

La terre tourne autour du soleil en suivant une orbite elliptique qu'elle parcourt dans le sens trigonométrique (vue de dessus) en une année (environ 365,25 jours).



Le soleil occupe l'un des foyers de cette ellipse (F sur la figure). L'ellipse est caractérisée par son **demi grand axe** a et son excentricité $e = OF / OP$.

Le plan de cette orbite est appelé **plan de l'écliptique** et la trajectoire de la terre dans ce plan est nommé "écliptique".

Le point de l'orbite le plus proche du soleil (P) est appelé le **périhélie** et le point le plus éloigné (A) l' **aphélie** .

La terre tourne également sur elle même (en une journée) autour d'un axe (l'axe des pôles) également dans le sens trigonométrique (vue de dessus). Le plan perpendiculaire à cet axe et passant par le centre de la terre est appelé **plan de l'équateur** et sa trace sur la terre est nommée "équateur".

Ce plan est incliné sur le plan de l'écliptique d'un angle $\epsilon = 23,45$ degrés.

De même, un plan passant par l'axe des pôles et un point quelconque de la surface de la terre M est appelé **méridien du lieu M** .

A deux moments dans l'année, le plan de l'équateur passe par le centre du soleil et ce plan coupe alors l'écliptique en deux points γ et γ' : il y a alors égalité des jours et des nuits pour tous les points du globe. Les instants correspondants sont appelés **équinoxes**.

Le point γ est appelé **point vernal** et correspond à l'équinoxe de printemps pour l'hémisphère nord. C'est ce point qui est utilisé par les coordonnées équatoriales et écliptiques.

Le point opposé γ' correspond à l'équinoxe d'automne.

L'**année tropique** est le temps qui sépare deux passages consécutifs de la terre au point vernal.

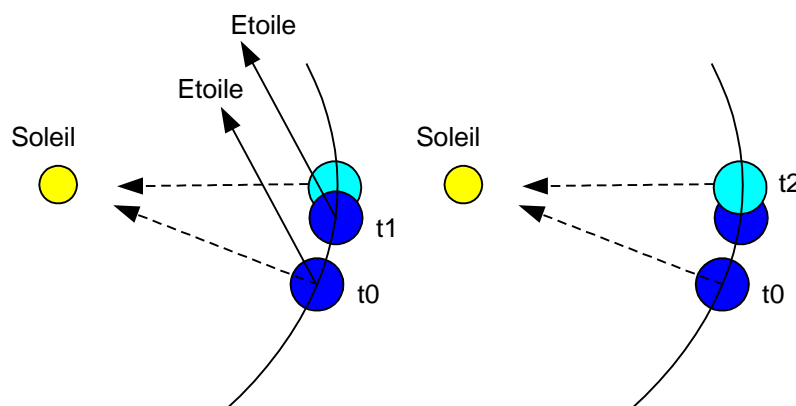
Bien que le système solaire soit entraîné dans l'espace à grande vitesse, les étoiles, qui sont toutes à des distances considérables (même les plus proches) semblent immobiles et peuvent être considérées comme étant fixes. Elles constituent le **ciel fixe** sur lequel se déplacent le soleil et les planètes, vu de la terre.

Le point vernal n'est pas toujours dirigé vers le même point du ciel fixe, mais tourne dans le sens rétrograde (inverse du sens trigonométrique) en effectuant une rotation complète en environ 26000 ans. Ceci est dû au mouvement de précession de la terre, analogue à celui d'une toupie, qui fait que son axe de rotation tourne sur un cône et induit le phénomène appelé **précession des équinoxes**.

Il tourne donc en moyenne de $360 / 26000 = 0,0138^\circ$ par an, soit environ 50 secondes d'arc par an. Pour les calculs relatifs au capteur on peut donc considérer que le point vernal est fixe.

Le **jour sidéral** est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs d'une même étoile au méridien d'un même lieu. Dans un repère lié au ciel fixe la terre fait alors un tour complet sur elle-même en un jour sidéral.

Le **jour solaire** est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil au méridien d'un même lieu. Comme la terre a avancé sur son orbite entre deux jours, elle doit faire un peu plus d'un tour sur elle-même en un jour solaire qui est donc un peu plus long que le jour sidéral (d'environ 4 minutes).



Sur le schéma ci-dessus, le jour sidéral est égal à l'intervalle de temps $(t1 - t0)$ alors que le jour solaire correspond à $(t2 - t0)$.

1.2 LES LOIS DE KEPLER

En 1609 l'astronome Johannes Kepler publie les deux premières lois décrivant le mouvement des planètes du système solaire et la troisième loi en 1618.

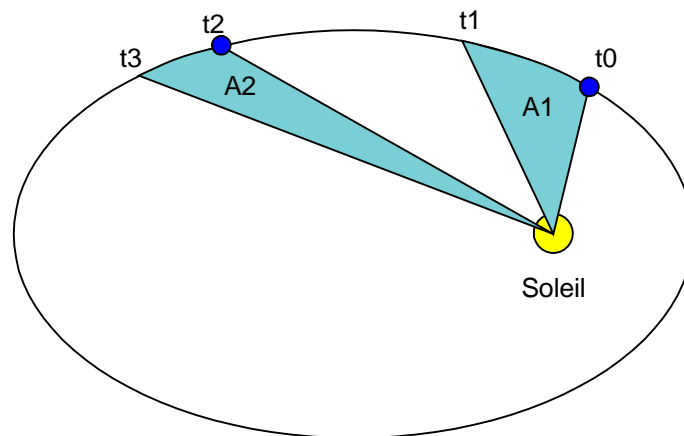
1.2.1 PREMIERE LOI : LOI DES ORBITES

Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil est un foyer.

En fait c'est plus exactement le centre de masse du système soleil - planète qui occupe réellement le foyer. Dans le cas de la terre cette différence est minime.

1.2.2 SECONDE LOI : LOI DES AIRES

Le rayon vecteur (droite reliant le soleil à la planète considérée) balaye des aires égales en des temps égaux.



Sur le dessin ci-dessus, si les durées $(t1 - t0)$ et $(t3 - t2)$ sont égales, alors les aires $A1$ et $A2$ sont égales.

Ceci implique que la vitesse de la planète (et donc de la terre) sur son orbite n'est pas constante. Elle est plus élevée lorsqu'elle est plus proche du soleil.

Comme la terre tourne également sur elle même et a vitesse constante, la durée du jour solaire n'est pas constante au cours de l'année.

Les deux premières lois décrivent un mouvement à accélération centrale.

1.2.3 TROISIEME LOI : LOI DES PERIODES

Le carré de la période sidérale T d'une planète est proportionnel au cube du demi grand axe a de sa trajectoire elliptique.

$$\frac{T^2}{a^3} = k \quad \text{avec } k \text{ constant}$$

Par la suite Newton explicita la valeur de k en fonction de la constante gravitationnelle et de la masse de l'objet central (ici le soleil) : c'est la théorie de l'attraction universelle publiée en 1687.

1.3 LES REPERES

Les calculs astronomiques sont en général effectués en coordonnées polaires (ou sphériques pour les calculs sur les planètes par rapport à la terre).

On comprend, d'après les chapitres précédents, que la connaissance de la position des planètes à un instant donné et de quelques autres grandeurs (vitesse angulaire, excentricité de l'orbite, ...) permet de calculer la position et la vitesse de toutes les planètes du système solaire à un instant quelconque.

Pour simplifier autant que possible ces calculs, les astronomes utilisent différents repères et différents systèmes de coordonnées.

Par exemple, le calcul de la position d'une planète vue d'un endroit particulier de la terre est décomposé de la manière suivante : on calcule la position de la terre par rapport au soleil à la date D, puis la position de la planète à observer à la même date (par rapport au soleil).

On effectue ensuite un changement de repère donnant sa position par rapport à la terre et enfin on calcule les angles entre la planète et le point particulier de la terre à l'heure de l'observation voulue.

Ceci implique la définition de systèmes de coordonnées célestes et de systèmes de coordonnées rattachées à la terre.

1.3.1 SYSTEMES DE COORDONNEES CELESTES

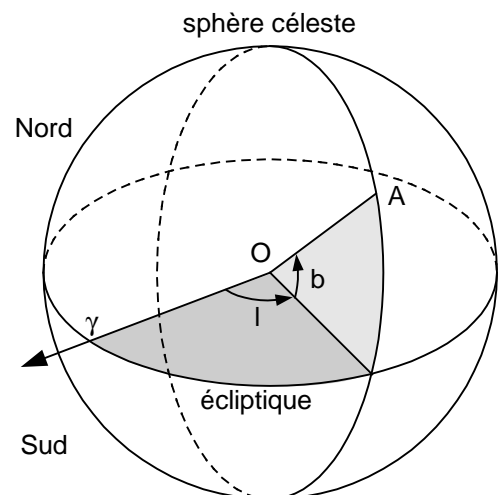
1.3.1.1 Coordonnées écliptiques

Elles sont définies par :

- un plan de référence : le plan de l'écliptique ;
- une direction d'origine : celle du point vernal (γ) ;
- un point origine : O qui peut être :

- le centre du soleil : on parle alors de repère héliocentrique et de système de **coordonnées écliptiques héliocentriques** ;

- le centre de la terre : on parle alors de repère géocentrique et de système de **coordonnées écliptiques géocentriques**.



Si A est le point visé :

- l'angle formé par $O\gamma$ et la projection de OA sur le plan de l'écliptique est la **longitude** (notée l) ;

- l'angle de OA avec le plan de l'écliptique est la **latitude** (notée b). La latitude peut être nord (positive) ou sud (négative).

1.3.1.2 Coordonnées équatoriales

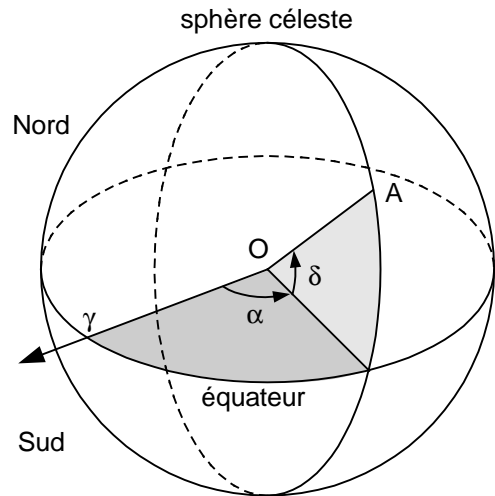
Elles sont définies par :

- un plan de référence : le plan de l'équateur ;
- une direction d'origine : celle du point vernal (γ) ;
- un point origine : O qui peut être :

- le centre du soleil : on parle alors de repère héliocentrique et de système de **coordonnées équatoriales héliocentriques** (peu employées) ;

- le centre de la terre : on parle alors de repère géocentrique et de système de **coordonnées équatoriales géocentriques**.

Rappel : l'angle entre les deux plans écliptique et équateur est $\varepsilon = 23,45$ degrés.



Si A est le point visé :

- l'angle formé par Oγ et la projection de OA sur le plan de l'équateur est **l'ascension droite** (notée α) ;
- l'angle de OA avec le plan de l'équateur est la **déclinaison** (notée δ). La déclinaison peut être nord (positive) ou sud (négative).

1.3.1.3 Coordonnées cartésiennes

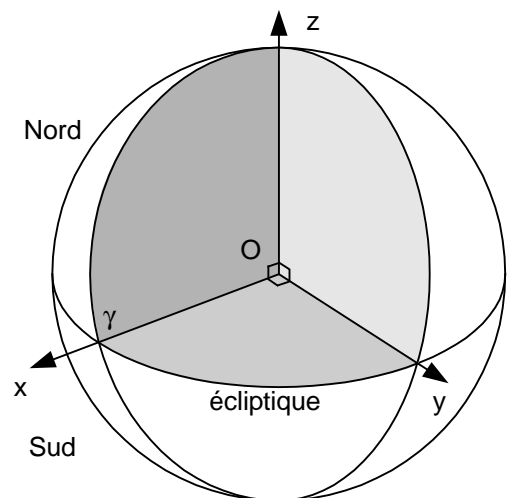
Elles sont définies par :

- un plan de référence : le plan de l'écliptique ;
- l'axe des x : axe Oγ ;
- l'axe des y : axe perpendiculaire à Oγ. dans le plan de l'écliptique ;
- l'axe des z : axe orthogonal au plan de l'écliptique, positif vers le nord ;

Ces trois axes définissent un trièdre direct.

- un point origine : O qui peut être :

- le centre du soleil : on parle alors de repère héliocentrique et de système de **coordonnées cartésiennes héliocentriques** ;



- le centre de la terre : on parle alors de repère géocentrique et de système de **coordonnées cartésiennes géocentriques**.

1.3.1.4 Changement de coordonnées

Passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales (trigonométrie sphérique) :

$$\sin \delta = \cos \varepsilon \sin b + \sin \varepsilon \cos b \sin l$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sin \varepsilon \sin b + \cos \varepsilon \cos b \sin l}{\cos b \cos l} \quad (\text{si } \cos b \cos l < 0, \text{ il faut ajouter } \pi \text{ à } \alpha).$$

Passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées cartésiennes (la distance OA est notée ρ) :

$$x = \rho \cos b \cos l$$

$$y = \rho \cos b \sin l$$

$$z = \rho \sin b$$

Dans le cas particulier du soleil, on a par définition $b = 0$, puisque le soleil est dans le plan de l'écliptique. Les formules précédentes se simplifient alors en :

- déclinaison : $\sin \delta = \sin \varepsilon \sin l$

- ascension droite : $\operatorname{tg} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{tg} l \quad (\text{si } \cos l < 0, \text{ il faut ajouter } \pi \text{ à } \alpha)$

et en coordonnées cartésiennes : $x = \rho \cos l, \quad y = \rho \sin l, \quad z = 0$

1.3.2 SYSTEMES DE COORDONNEES RATTACHEES A LA TERRE

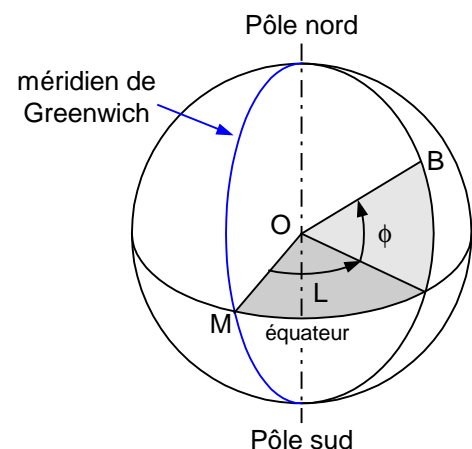
1.3.2.1 Coordonnées géographiques

Elles sont définies par :

- un plan de référence : le plan de l'équateur ;
- une direction d'origine :
celle du méridien de Greenwich ;
- un point origine : le centre de la terre.

On désigne par M l'intersection du méridien de Greenwich avec l'équateur.

Si B est le point visé, on fait passer un **méridien** par ce point.
(**Rappel** : un méridien est un arc de grand cercle perpendiculaire à l'équateur) :



- l'angle formé par OM et la projection de OB sur le plan de l'équateur est la **longitude** (notée L). Elle est comptée positive à l'ouest et négative à l'est ;

- l'angle de OB avec le plan de l'équateur est la **latitude** (notée ϕ). La latitude est comptée positive au nord et négative au sud.

Les amplitudes sont alors : $-180^\circ \leq L \leq 180^\circ$ et $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$

Attention : ne pas confondre les longitudes et latitudes géographiques et les longitudes et latitudes célestes.

1.3.2.2 Coordonnées horizontales

Elles sont définies par :

- un plan de référence : le plan horizontal du lieu (déterminé par exemple par un niveau) ;
- une direction d'origine : le méridien du lieu ;
- un point origine : le centre de la terre.

Les coordonnées horizontales d'un astre (point visé) sont :

- l'**azimut** a : angle entre le plan vertical passant par le point visé et le méridien du lieu ;
- la **hauteur** h : angle du point visé avec le plan horizontal.

L'azimut est compté positif dans le sens des aiguilles d'une montre et compris entre 0 et 360°.

La hauteur d'un astre visible est toujours positive puisqu'une valeur négative indiquerait que l'astre est plus bas que l'horizon et ne serait donc pas visible.

On utilise parfois l'angle complémentaire de la hauteur ($90^\circ - h$) qui est appelée distance zénithale z.

Une monture azimutale utilise un tel système d'axes : le système de visée pivote autour d'un axe horizontal lui-même porté par un bâti d'axe vertical. Le suivi d'un astre implique la variation de ces deux angles.

1.3.2.3 Coordonnées horaires

Elles sont définies par :

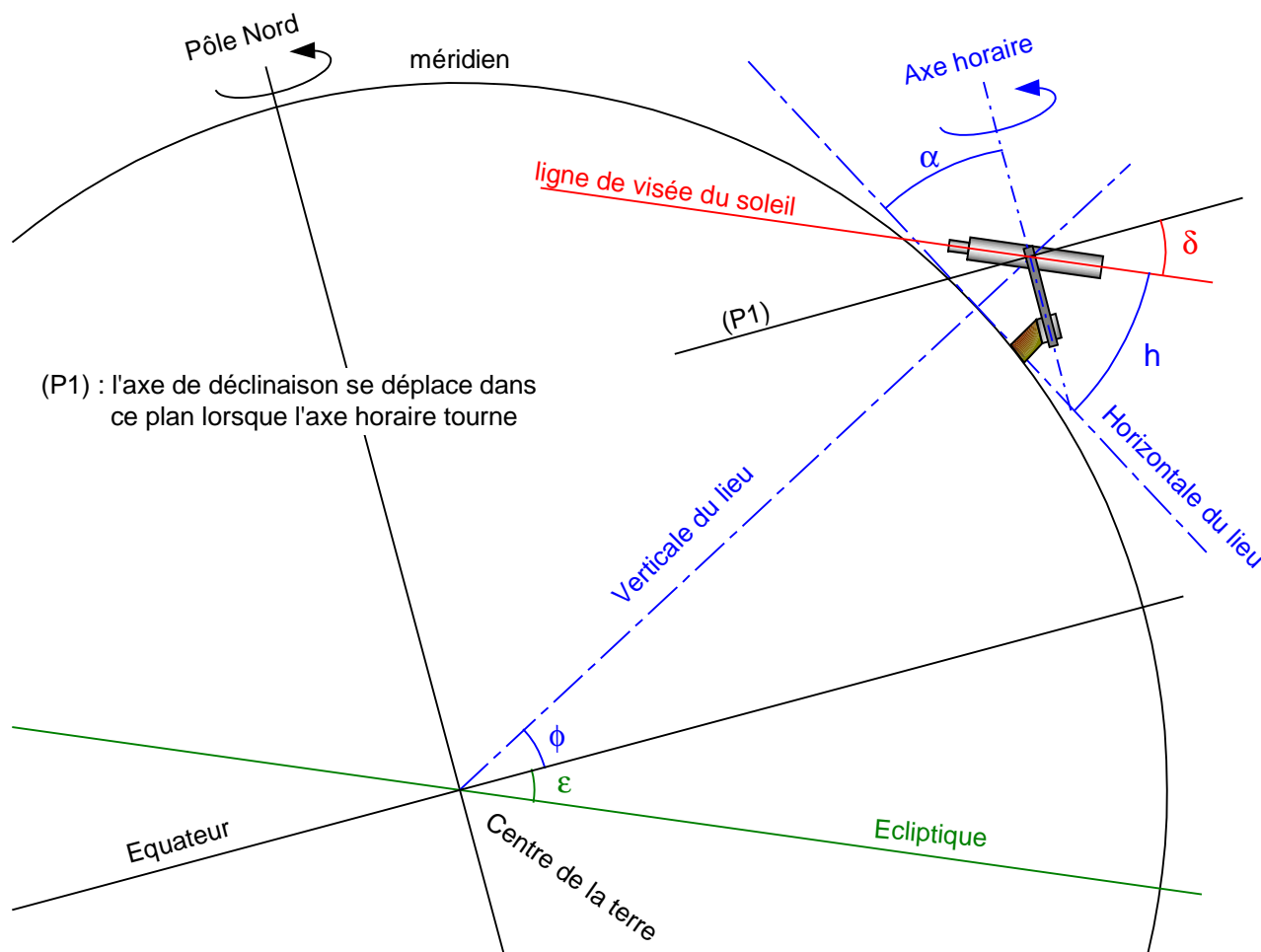
- un plan de référence : le plan de l'équateur ;
- une direction d'origine : le méridien du lieu ;
- un point origine : le centre de la terre.

Les coordonnées horizontales d'un point visé sont :

- l'angle entre le point visé et le plan de l'équateur : c'est la **déclinaison** δ vue dans le système de coordonnées équatoriales ;
- l'angle du point visé avec le méridien du lieu. Il est appelé **distance méridienne** lorsqu'il est exprimé en degrés d'arc (positif dans le sens trigonométrique). Il est appelé **angle horaire** lorsqu'il est exprimé en heures (temps) et positif en sens inverse. Il est souvent noté H et parfois ω .

Une monture équatoriale utilise un tel système d'axes : le système de visée pivote autour d'un axe parallèle à l'axe des pôles (axe horaire) lui même monté sur un axe parallèle à l'équateur. Le suivi d'un astre implique seulement de compenser la rotation de la terre en tournant uniquement l'axe horaire.

La figure ci-dessous regroupe certaines données définies dans les paragraphes précédents



1.4 LE TEMPS

D'après ce qui est décrit plus haut, on voit que le point vernal n'est pas fixe par rapport au ciel fixe, ce qui signifie qu'un tour complet de la terre autour du soleil est plus long que l'année tropique et que la durée du jour solaire n'est pas constante tout au long de l'année.

Aussi, on a été amené à définir des périodes de temps constantes et une origine des temps, puis des corrections à ces temps constants pour tenir compte des différentes variations.

1.4.1 LE TEMPS SOLAIRE VRAI (TSV)

Le jour solaire vrai est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil au méridien d'un même lieu. Le jour solaire n'a pas la même durée tout au long de l'année.

L'heure solaire est égale au jour solaire divisé par 24. C'est l'heure indiquée par un cadran solaire non corrigé.

1.4.2 LE TEMPS SOLAIRE MOYEN (TM)

Le jour moyen est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs au méridien d'un soleil fictif de telle manière que tous les jours soient égaux, ce soleil fictif franchissant le point vernal en même temps que le soleil réel.

Ce jour est divisé en 24 heures de 60 minutes de 60 secondes.

La relation entre les temps solaires moyen et vrai est donnée par la formule :

$$TM = TSV - E$$

où E est la correction exprimée en secondes due à la variation de durée du jour solaire vrai.

E est appelée **équation du temps** et est donnée par la formule approchée à 50 secondes près :

$$E = 460 \sin M - 592 \sin 2L$$

avec L = longitude moyenne du soleil et M = anomalie moyenne du soleil.

1.4.3 LE TEMPS MOYEN DE GREENWICH (GMT)

C'est le temps solaire moyen du méridien de Greenwich (GMT : Greenwich Meridian Time). Ceci permet de définir une origine des temps sur la terre et donc un temps unique pour toute la terre.

Le temps moyen local d'un lieu est égal au temps moyen de Greenwich auquel on retranche la longitude du lieu exprimée en temps :

$$\text{Heure locale} = \text{Heure GMT} - \text{longitude du lieu (en temps)}$$

Les 360 degrés de circonférence de la terre correspondent à 24 heures (soit 15° par heure).

Par convention les longitudes sont négatives à l'est de Greenwich et positives à l'ouest et sont comptées de 0 à -180° à l'est et de 0 à 180° à l'ouest (comme les fuseaux horaires qui sont comptés à ±12 heures).

De tout ceci, il découle que le passage du soleil au méridien de Greenwich (midi solaire moyen) correspond à 0H00 GMT.

1.4.4 LE TEMPS UNIVERSEL (TU)

L'usage courant fait commencer le jour à minuit, soit 0H00, ce qui est en contradiction avec la définition précédente. Il fut donc décidé de créer le temps universel qui fait commencer le jour 12 heures avant le passage du soleil au méridien de Greenwich et de numérotter les heures de 0 à 24.

On a donc la relation suivante : $TU = GMT + 12$ (heures)

Lorsque le soleil passe au méridien de Greenwich il est 12H00 en temps universel.

1.4.5 LE TEMPS DES EPHEMERIDES (TE)

Des mesures de temps plus précises (avec des horloges atomiques) montrent que le mouvement de la terre n'est pas régulier. L'origine de ces irrégularités n'est pas entièrement connue et on ne peut pas calculer l'écart entre TE et TU.

Le temps universel et le temps des éphémérides ont la même origine : la date fictive du 0 janvier 1900, appelée **origine des temps**. Toutes les constantes astronomiques (position des planètes, etc..) sont données par rapport à cette origine.

Les éphémérides, pour des raisons évidentes de commodité d'emploi, publient leurs renseignements en TU. L'écart entre TU et TE est de l'ordre de 52 secondes en 1981, ce qui induit un écart de 2 secondes d'arc sur la position réelle du soleil.

Si l'on ne veut pas une précision meilleure que quelques secondes d'arc sur les positions du soleil ou des planètes, on peut confondre les temps TU et TE.

1.4.6 LE TEMPS SIDERAL (TS)

Le jour sidéral est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du point vernal au méridien du lieu. Le temps sidéral est l'angle horaire du point vernal.

Pour une étoile d'ascension droite α et d'angle horaire H à un instant donné, on a donc : $TS = H + \alpha$.

L'année tropique est l'intervalle de temps entre deux passages du soleil au point vernal et vaut :

$$An = 365,24219879 \text{ jours.}$$

Le temps sidéral à 0H00 Greenwich est donné par :

$$TS = [TS_0 + TS_1 N] \quad \text{modulo 1 jour, soit 86400 secondes}$$

où TS est exprimé en secondes de temps

et N est le nombre de jours (et fraction de jours) depuis l'origine des temps (le 0 janvier 1900).

TS0 représente l'angle de γ avec le méridien de Greenwich à l'origine des temps, angle exprimé en secondes de temps et TS1 représente la vitesse angulaire exprimée en secondes par jour.

Le temps sidéral est donc l'angle que fait le méridien de Greenwich avec la direction du point vernal à un instant donné N exprimé en jours et fractions de jour.

on a : $TS0 = 23750,3$: angle de γ avec le méridien de Greenwich au 0 janvier 1901 (¹)

et : $TS1 = \frac{86400}{365,24219879} = 236,555362$

Pour passer en degrés d'arc, on divise TS0 et TS1 par 240 (car $\frac{86400}{360^\circ} = 240$).

Par définition, le temps sidéral est le même tous les ans à la même heure.

Si l'on change d'origine, seule la valeur de TS0 change.

Le temps sidéral local est donné par la formule : $TSL = TS - \text{longitude du lieu} + TU$.

1.4.7 CALCUL DU TEMPS SIDERAL

D'après l'équation précédente, on voit qu'il faut relier la date actuelle à l'origine des temps astronomiques pour pouvoir calculer le temps sidéral et tous les autres paramètres.

La date actuelle est exprimée dans le calendrier Grégorien et les constantes astronomiques sont données pour la date d'origine des temps correspondant au 0 janvier 1900.

Remarque 1 : certains algorithmes de calcul de dates donnent un décalage de 1 jour pour la période antérieure au 28 février 1900 et sont justes pour la période suivante. Aussi certaines éphémérides utilisent comme origine le 0 janvier 1901 (les constantes calculées ont été modifiées pour tenir compte de cette nouvelle origine) pour que les dates puissent être calculées avec ces programmes. Pour nos calculs, c'est cette origine (0 janvier 1901) qui a été retenue, car ce sont les seules valeurs d'éphémérides dont nous disposons.

Les dates actuelles sont données dans le calendrier Grégorien qui commence au premier janvier de l'an 0 à 0 heure pour les calculs qui suivent (alors qu'historiquement l'an 0 n'a pas existé - tous les calendriers commencent en l'an 1). Le fait de commencer à l'an 0 simplifie les calculs.

La formulation ci-dessous permet de calculer le nombre N de jours écoulés entre le 1er janvier 0 et une date quelconque. Elle a été synthétisée à partir de différents documents qui donnent des formules plus ou moins compliquées.

L'élaboration de cette formule est bâtie sur les considérations suivantes :

- toutes les années ont 365 jours
- tous les mois ont 31 jours
- pour calculer N, on ajoute donc $(365 \times \text{années}) + (31 \times \text{mois}) + J$, en comptant les mois à partir de 0.

¹ Non, ce n'est pas une erreur de frappe. Voir "Remarque 1" au paragraphe suivant.

- il faut ensuite faire les corrections pour les années bissextiles (termes en $|A_0/n|$)
(mais seulement après février, d'où le test et la variable A_0)
- et les corrections sur les nombres de jours réels des mois (calcul du terme correcteur C)

Nota : la notation $|x|$ signifie "partie entière de x ".

La date est exprimée en "jour - mois - année". Exemple : 25 - 03 - 1998 pour le 25 mars 1998.

On note J le jour, M_s le mois et A l'année (sur l'exemple $J = 25$, $M_s = 3$ et $A = 1998$).

On calcule successivement :

$$- M = M_s - 1$$

$$- \text{si } M < 2 : A_0 = A - 1 \quad \text{et} \quad C = 0$$

$$- \text{si } M \geq 2 : A_0 = A \quad \text{et} \quad C = |0,4 M + 2,7|$$

$$- N = 365 A + |A_0/4| - |A_0/100| + |A_0/400| + 31 M - C + J$$

Pour le 25 mars 1998 : $N = 729838$

Remarque 2 : le reste de la division entière de ce nombre par 7 donne le jour de la semaine avec :
samedi = 0, dimanche = 1, ... , vendredi = 6.

Sur l'exemple : $N = 729838 = (104262 \times 7) + 4$ le reste est 4, c'est donc un mercredi.

Ce calcul effectué pour le 0 janvier 1900 donne $N_0 = 693960$

Et pour le 0 janvier 1901 : $N_1 = 694325$

Suivant la date d'origine des constantes astronomiques utilisées, il faudra retrancher ce nombre (N_0 ou N_1) de celui obtenu pour la date choisie.

1.5 CALCULS DE BASE

1.5.1 CALCUL DES COORDONNEES ECLIPTIQUES HELIOCENTRIQUES

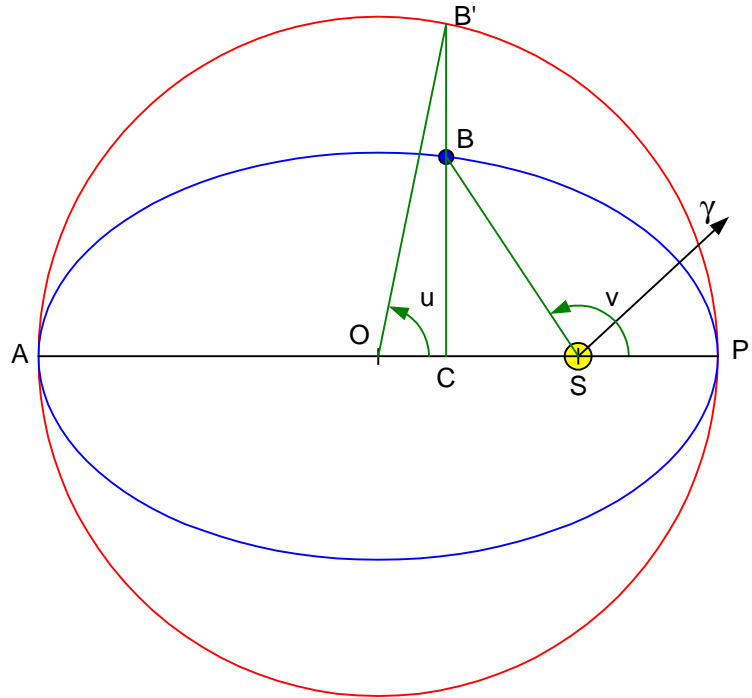
Comme on l'a vu plus haut, les mouvements des planètes autour du soleil ne se font pas à vitesse constante, ce qui complique les calculs.

Un moyen de contournement de cette complexité est d'élaborer des paramètres "moyens" et de considérer que la différence entre ces **valeurs moyennes** et les valeurs vraies sont des **anomalies**.

C'est cette démarche qui est utilisée en astronomie et que l'on illustre sur l'exemple ci-contre d'une planète gravitant autour du soleil.

A un instant donné la planète se trouve au point B de l'ellipse.

L'ellipse est caractérisée par son demi grand axe OP et par son excentricité e (rapport de la distance focale au demi grand axe), soit $e = \frac{OS}{OP}$.



On appelle **anomalie vraie** l'angle $v = PSB$.

Si l'on élève une perpendiculaire au grand axe passant par B, celle-ci coupe le cercle principal (cercle de rayon égal au demi grand axe de l'ellipse et de même centre O) en B'.

On appelle **anomalie excentrique** l'angle $u = POB'$.

Un calcul géométrique permet d'établir une relation entre les angles v et u :

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \quad \text{ou :} \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

Lorsque la planète parcourt son orbite selon les lois de Kepler, u varie selon l'équation :

$$u - e \sin u = n (t - t_0)$$

avec : t : instant où la planète se trouve en B

t_0 : instant où la planète se trouve au périhélie (point P)

n : une constante liée à la planète

Pour la suite, on définit une planète "moyenne" qui tourne à vitesse angulaire constante n autour du soleil.

A l'instant t elle a tourné d'un angle M tel que : $M = n (t - t_0)$.

L'angle M est appelé **anomalie moyenne**.

Cet angle est lié à la **longitude moyenne** (de la planète moyenne) L et à la **longitude du périhélie** p par la relation : $M = L - p$

Par rapport à une origine des temps t_0 et on peut alors calculer les coordonnées écliptiques de la planète par rapport au soleil (origine du repère = le soleil, direction d'origine $O\gamma$) :

La longitude du périhélie est donnée par : $p = p_0 + pp (t - t_0)$

La longitude moyenne est donnée par : $L = l_0 + lp (t - t_0)$

avec : p_0 : longitude du périhélie à l'origine des temps (t_0) dans le repère écliptique

pp : vitesse angulaire du périhélie

l_0 : longitude moyenne à l'origine des temps dans le repère écliptique

lp : vitesse angulaire de la longitude moyenne

Ces 4 valeurs ainsi que l'excentricité e sont caractéristiques de la planète.

On calcule alors successivement :

- le temps t écoulé depuis l'origine des temps (appelé **date absolue**)

- la longitude du périhélie : p

- la longitude moyenne : L

- l'anomalie moyenne : $M = L - p$

- l'anomalie excentrique : u telle que : $u - e \sin u = M$

que l'on peut résoudre par une méthode itérative (il n'y a pas de solution analytique)

- l'anomalie vraie : v telle que $\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$

puis la longitude vraie de la planète : $l = v + p$

1.5.2 CALCUL DE LA LONGITUDE VRAIE DU SOLEIL

De la même façon, on peut calculer les coordonnées écliptiques du soleil par rapport à la planète (origine du repère = la planète).

Ce qui nous intéresse ici c'est le calcul de la longitude vraie du soleil vue de la terre. On utilise pour cela la trajectoire **apparente** du soleil dans le ciel.

Remarque : le soleil étant dans le plan de l'écliptique, sa latitude est toujours nulle.

Pour une origine des temps au 0 janvier 1901 (t_0), les constantes "géocentriques" du soleil sont :

- $p_0 = 281,235$ en degrés

- $pp = 4,69 \cdot 10^{-5}$ en degrés par jour

- $l_0 = 278,965$ en degrés

- $lp = 0,985647342$ en degrés par jour

et l'excentricité $e = 0,01675$

On calcule d'abord le nombre de jours écoulés entre le 0 janvier 1901 et la date voulue (voir le chapitre "calcul du temps sidéral"), soit la valeur $N1$.

On ajoute l'heure (heures, minutes, secondes) voulue en fraction de jour, ce qui donne $Dt = (t - t_0)$.

On calcule ensuite : $p = p_0 + pp Dt$ puis $L = l_0 + lp Dt$ puis $M = L - p$

Les angles p et L sont calculés modulo 360 degrés.

Il est bon ensuite de passer tous les angles en radians.

Les valeurs de L (longitude moyenne du soleil) et M (anomalie moyenne du soleil) servent aussi à calculer l'équation du temps.

Il faut ensuite résoudre $u - e \sin u = M$ par une méthode itérative, puis on calcule v et enfin la longitude vraie du soleil : $l = v + p$.

Remarque : la longitude vraie de la terre par rapport au soleil (héliocentrique) est égale à la longitude vraie du soleil à laquelle on ajoute 180 degrés (ou π radians).

1.5.3 CALCUL DE LA DECLINAISON ET DE L'ASCENSION DROITE DU SOLEIL

Ceci se fait par les équations de passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales. La latitude du soleil étant nulle par définition, les formules du § 1.3.1.4 se simplifient, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \text{- déclinaison du soleil :} & \quad \sin \delta = \sin \varepsilon \sin l \\ \text{- ascension droite du soleil :} & \quad \text{tg } \alpha = \cos \varepsilon \text{ tg } l \quad (\text{si } \cos l < 0, \text{ il faut ajouter } \pi \text{ à } \alpha) \\ \text{ou :} & \quad \cos \alpha = \frac{\cos l}{\cos \delta} \end{aligned}$$

Remarque : aux équinoxes : $\sin l = 0$ (printemps : $l = 0$, automne : $l = \pi$) donc $\delta = 0$
 aux solstices : $\sin l = 1$ (été : $l = \pi/2$, hiver : $l = 3\pi/2$) donc $\delta = \delta_{\max} = \varepsilon$

1.5.4 CALCUL DES COORDONNEES HORIZONTALES DU SOLEIL

La hauteur (angle du point visé - ici le soleil - avec le plan horizontal) est donnée par la formule :

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \quad (= \cos z)$$

et l'azimut (angle entre le plan vertical passant par le soleil et le méridien du lieu) est donné par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{\cos \delta \sin H}{\cos h} \\ \cos a &= \frac{-\cos \phi \sin \delta + \sin \phi \cos \delta \cos H}{\cos h} \end{aligned}$$

avec : ϕ : latitude terrestre du lieu
 δ : déclinaison
 H : angle horaire du lieu

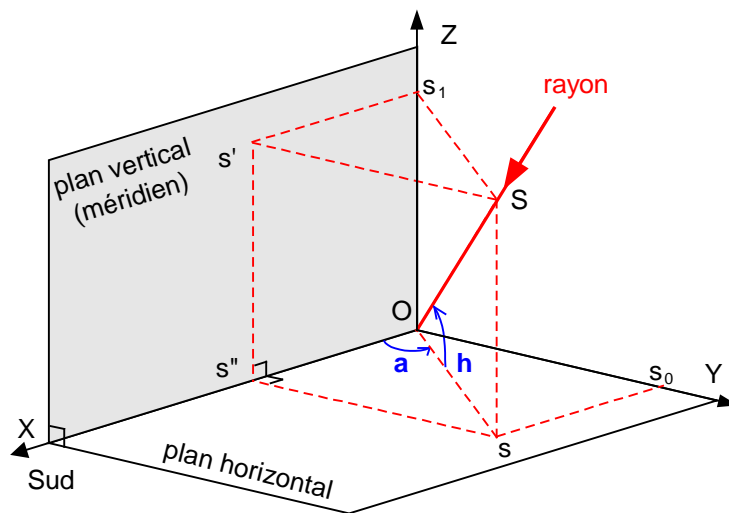
L'angle horaire est la différence entre le temps sidéral et l'ascension droite : $H = TS - \alpha$

1.5.5 COURSE DU SOLEIL DANS LE CIEL

On se demande souvent quelle est la forme de la trajectoire apparente du soleil vue d'un point fixe quelconque de la terre et pourquoi il faut un mouvement particulier de deux axes en général pour suivre sa course diurne.

Bien que ceci n'intervienne dans aucun calcul à suivre, nous avons développé les équations suivantes qui permettent la représentation de sa course en 3 dimensions.

A partir des équations précédentes, on peut effectuer le calcul suivant (voir figure ci-dessous).



En posant $OS = L$, on a : $Os = L \cos h$

$$X_s = Os'' = Os \cos a = L \cos h \cos a$$

$$Y_s = Os_0 = s''s = Os \sin a \quad \text{soit} \quad Y_s = L \cos h \sin a$$

$$Z_s = Os_1 = sS = L \sin h$$

En exprimant les angles h et a (hauteur et azimut du soleil) en fonction de la latitude et de la déclinaison, on a, tous calculs faits :

$$X_s = L (-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos H)$$

$$Y_s = L \cos \delta \sin H$$

$$Z_s = L (\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H)$$

avec $H = 15 (12 - t)$ où t est en heures solaires du lieu et la distance méridienne H en degrés.

Dans les représentations ci-dessous, l'observateur est au point $(0, 0)$ du plan horizontal et on a pris $L=1$ (valeur arbitraire).

Le soleil parcourt la courbe rouge de 6 à 18 heures solaires.

L'intervalle de temps entre chaque trait bleu représente 24 minutes.

Exemple 1 : latitude de 45° N- déclinaison 23°
(donc proche du solstice d'été dans l'hémisphère nord).

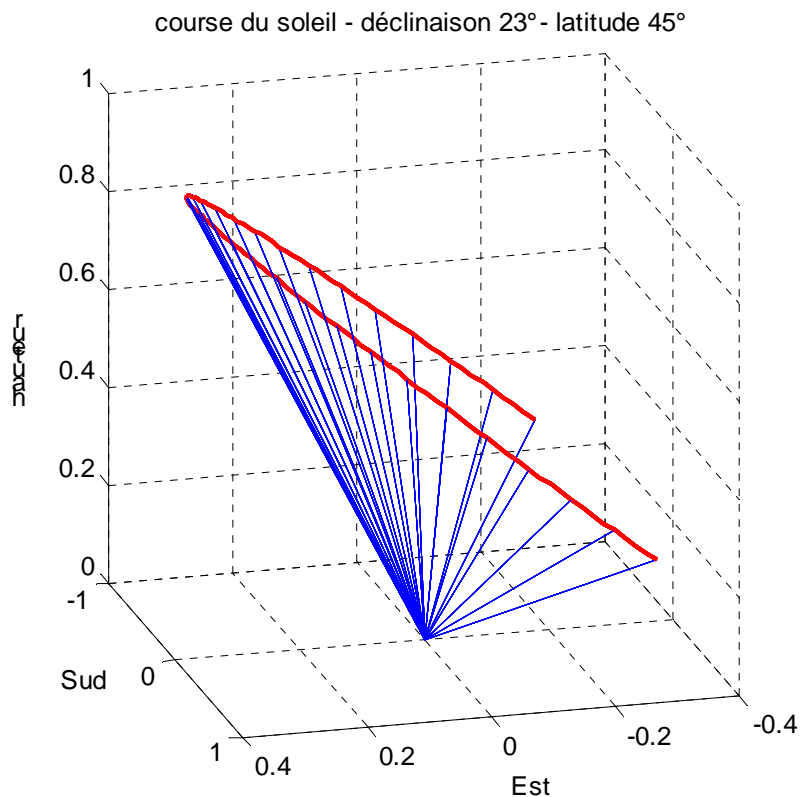
Le soleil décrit un cône dont l'observateur occupe le sommet.

A 6 et à 18 heures solaires, le soleil est au-dessus de l'horizon : il fait jour.

Remarque :

Sur l'équateur ($\phi = 0^\circ$), à 6 et 18 heures ($H = 90^\circ$), les équations précédentes donnent $Z_s = 0$ quelque soit la déclinaison δ .

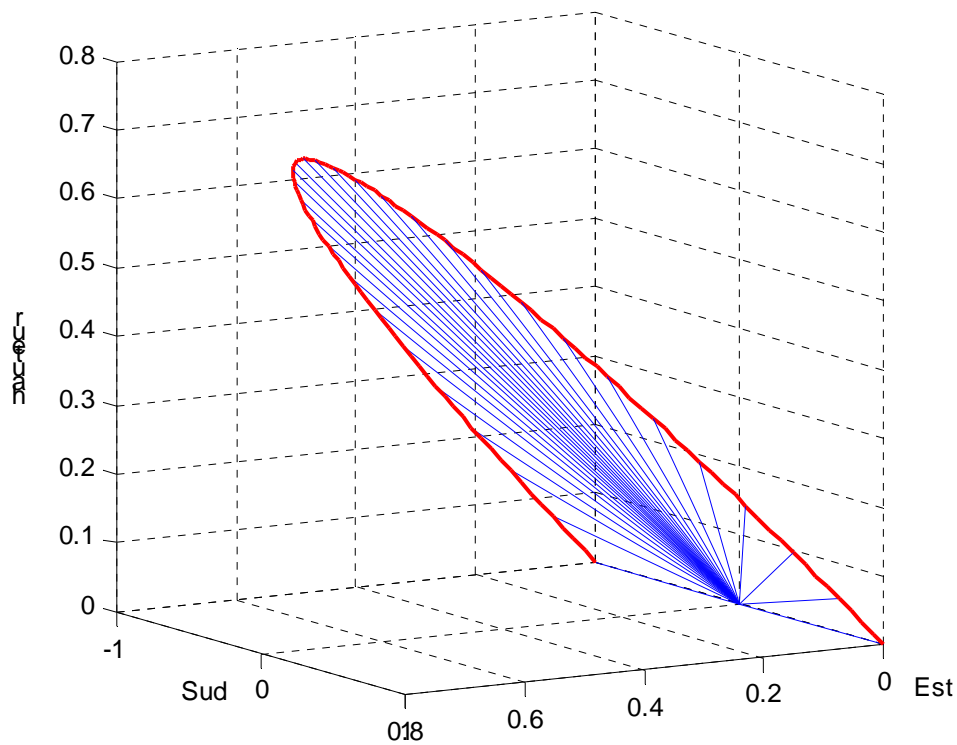
Ceci qui signifie que, sur l'équateur, la durée du jour est égale à la durée de la nuit toute l'année.



Exemple 2 : latitude de 45° N- déclinaison 0° (équinoxes).

Dans ce cas particulier, la course du soleil est contenue dans un plan.

course du soleil - déclinaison 0° - latitude 45°



Le soleil est sur l'horizon à 6 et 18 heures solaires : la durée du jour est égale à la durée de la nuit. C'est d'ailleurs l'une des propriétés des équinoxes.

Remarque :

Dans les équations précédentes, à 6 et 18 heures, $H = 90^\circ$, donc : $X_s = Z_s = 0$ quelque soit la latitude.

Donc, aux équinoxes, la durée du jour est égale à la durée de la nuit sur toute la terre.

2 CALCULS DE DEFINITION DU CAPTEUR

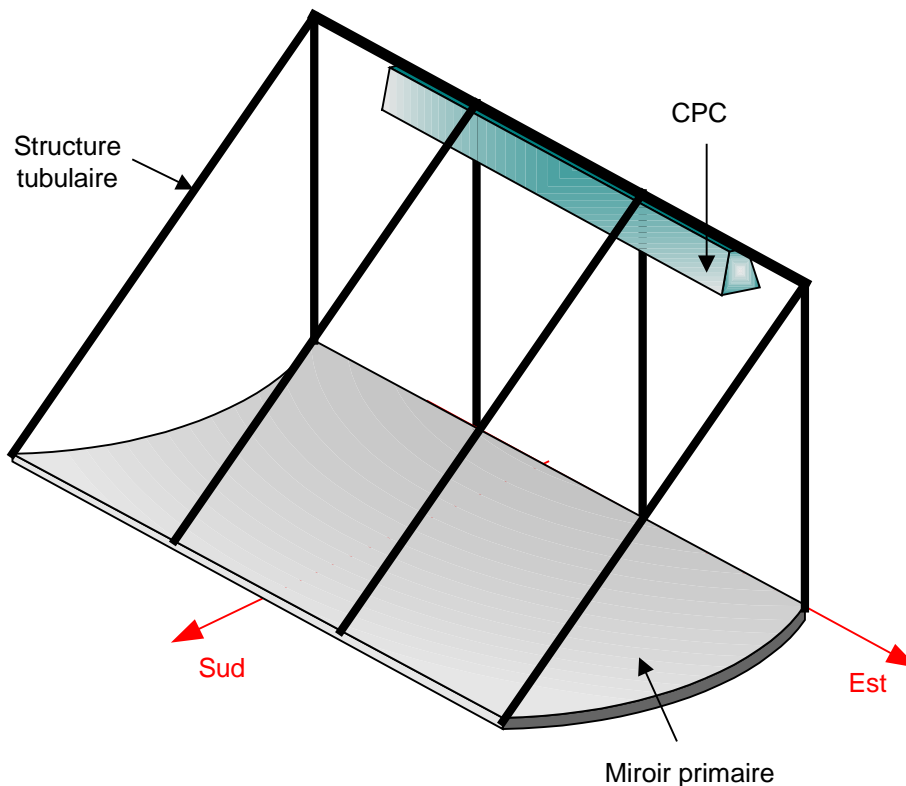
2.1 PRESENTATION SOMMAIRE DU CAPTEUR

Le capteur se présente sous l'aspect illustré ci-dessous.

Le miroir primaire est un miroir cylindro-parabolique d'orientation Est-Ouest : une coupe suivant un plan vertical orienté Nord-Sud donne une portion de parabole et une coupe suivant un plan orienté Est-Ouest donne une droite.

Il est surmonté d'un concentrateur parabolique composé (CPC) dont la pupille de sortie est placée sur la ligne focale du miroir primaire.

L'ensemble est porté par une structure tubulaire rigide rendant solidaire le miroir primaire et le



CPC.

Un mécanisme, non représenté ici, permet à l'ensemble de pivoter autour d'un axe Est-Ouest pour compenser la variation de hauteur du soleil dans la journée et faire que les rayons réfléchis par le miroir primaire arrivent dans le CPC.

Le fond du CPC contient un tube partiellement rempli d'eau, jouant le rôle de chaudière. Sous l'effet du rayonnement réfléchi, l'eau se transforme en vapeur d'eau sous pression. C'est cette vapeur qui constitue l'énergie utilisable du système.

Pour diminuer la déperdition de chaleur, l'extérieur du CPC est caréné et rempli de matériau isolant. La dimension de ce carénage dans la direction du sud ferait de l'ombre sur le miroir primaire rendant cette partie du miroir inutile. Elle a donc été ôtée et de ce fait le sommet de la parabole ne fait pas partie du miroir.

2.2 LE CONCENTRATEUR PARABOLIQUE COMPOSE

2.2.1 DEFINITION DU CPC

Le CPC est constitué de deux portions de paraboles identiques placées symétriquement par rapport à un axe (axe IY sur la figure).

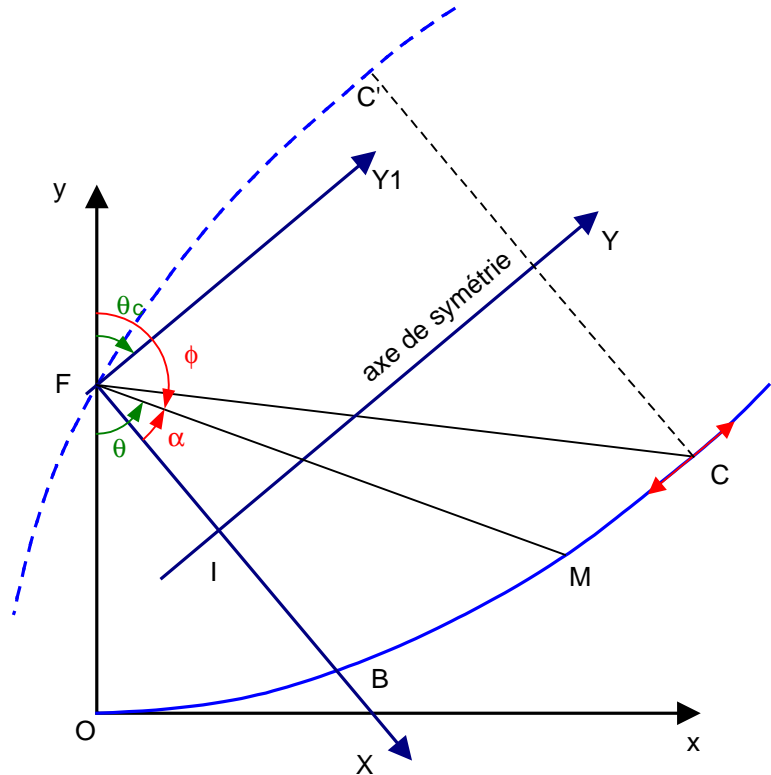
L'une des extrémités d'une parabole (point B) est placée au foyer de l'autre parabole : la parabole passant par les points B et C a le point F pour foyer et le foyer de la parabole en pointillé est le point B.

L'autre extrémité des paraboles (C et C') est telle que la tangente en ces points est parallèle à l'axe de symétrie du CPC.

La partie utile de la parabole pour constituer le CPC est la partie BC de la figure ci-contre (et FC' pour l'autre).

La ligne FB est la **pupille de sortie** du CPC. Sa largeur est notée d_2 .

La ligne CC' est la **pupille d'entrée** du CPC. Sa largeur est notée d_1 .



2.2.2 EQUATIONS DU CPC

Pour tous ces calculs, voir la figure ci-dessus.

Dans le repère classique (xOy), l'équation de la parabole centrée en O et de focale OF est :

$$y = \frac{x^2}{2p} \quad \text{avec } p = 2 \text{ OF}$$

ou en coordonnées polaires pour un point quelconque M de la parabole (démontrée au § 2.3.1.3) :

$$FM = p \frac{1}{1 + \cos\theta} \quad \text{avec } \theta : \text{angle de FM avec l'axe Oy}$$

Equation polaire en fonction de l'angle ϕ : $\theta = \pi - \phi$ donc : $\cos \theta = \cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$

$$\text{d'où : } FM = p \frac{1}{1 - \cos\phi} \quad (\text{a})$$

2.2.2.1 Calcul de la largeur de la pupille de sortie $FB = d2$

FB est égal à FM quand le point M est en B , soit pour la valeur particulière de ϕ : $\phi_B = \theta_c + \frac{\pi}{2}$

$$\text{donc : } \cos \phi_B = \cos \left(\theta_c + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \theta_c \quad \text{ce qui donne : } FB = d2 = p \frac{1}{1 + \sin \theta_c}$$

$$\text{soit : } p = d2 (1 + \sin \theta_c) \quad (b)$$

Avec les formules (a) et (b), il est possible d'éliminer le paramètre p de (a) car pour définir le CPC, le paramètre $d2$ sera plus utile que p .

$$\text{On a donc : } FM = d2 \frac{1 + \sin \theta_c}{1 - \cos \phi}$$

2.2.2.2 Calcul des coordonnées du point M dans le repère $(XFY1)$

La projection de M sur FX et sur $FY1$ donne en fonction de l'angle α :

$$X1 = FM \cos \alpha \quad \text{avec } \alpha = -\phi + \theta_c + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - (\phi - \theta_c) \quad \text{d'où : } \cos \alpha = \sin (\phi - \theta_c)$$

$$Y1 = FM \sin \alpha \quad \sin \alpha = \cos (\phi - \theta_c)$$

$$\text{d'où : } X1 = d2 \frac{1 + \sin \theta_c}{1 - \cos \phi} \sin (\phi - \theta_c) \quad \text{et} \quad Y1 = d2 \frac{1 + \sin \theta_c}{1 - \cos \phi} \cos (\phi - \theta_c)$$

2.2.2.3 Calcul des coordonnées du point M dans le repère (XIY)

Le point I est le milieu de FB , donc $FI = \frac{d2}{2}$, donc dans le repère (XIY) on a :

$$X = d2 \frac{(1 + \sin \theta_c) \sin (\phi - \theta_c)}{1 - \cos \phi} - \frac{d2}{2} \quad (1)$$

$$Y = d2 \frac{(1 + \sin \theta_c) \cos (\phi - \theta_c)}{1 - \cos \phi}$$

2.2.2.4 Calcul de l'angle ϕ pour le point C (ϕ_c)

La tangente en C est parallèle à l'axe Y , donc dans le repère (XIY) : $\frac{dY}{dX} \rightarrow \infty$ en C

$$\text{d'où : } \frac{dX}{dY} = 0 \quad \text{mais } \frac{dX}{dY} = \frac{dX}{d\phi} \frac{d\phi}{dY} \quad \text{donc : } \frac{dX}{d\phi} = 0$$

$$\text{Il faut donc dériver l'expression } X = d2 \frac{(1 + \sin \theta_c) \sin (\phi - \theta_c)}{1 - \cos \phi} - \frac{d2}{2}$$

et trouver la valeur de ϕ qui l'annule.

$$\frac{dX}{d\phi} = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c) \cos(\phi - \theta_c)(1 - \cos\phi) - (1 + \sin\theta_c) \sin(\phi - \theta_c)\sin\phi}{(1 - \cos\phi)^2}$$

$$\frac{dX}{d\phi} = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c)}{(1 - \cos\phi)^2} [\cos(\phi - \theta_c) - \cos(\phi - \theta_c)\cos\phi - \sin(\phi - \theta_c)\sin\phi]$$

$$\frac{dX}{d\phi} = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c)}{(1 - \cos\phi)^2} [\cos(\phi - \theta_c) - \cos\theta_c]$$

On a donc $\frac{dX}{d\phi} = 0$ pour $\cos(\phi - \theta_c) - \cos\theta_c = 0$ soit : $\phi - \theta_c = \theta_c$ d'où : $\phi = 2\theta_c$

donc l'angle $Y1FC = \theta_c$

Pour le point B : $\phi_B = \frac{\pi}{2} + \theta_c$

et pour le point C : $\phi_C = 2\theta_c$

2.2.2.5 Coordonnées du point C dans le repère (XIY)

En reprenant les équations (1) du § 2.2.2.1.3 et en remplaçant ϕ par $2\theta_c$, on a :

$$X_c = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c) \sin(\phi - \theta_c)}{1 - \cos\phi} - \frac{d2}{2} = d2 \left[\frac{(1 + \sin\theta_c) \sin\theta_c}{1 - \cos 2\theta_c} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{mais : } \cos 2\theta_c = 1 - 2 \sin^2\theta_c \quad \text{donc } X_c = d2 \left[\frac{(1 + \sin\theta_c) \sin\theta_c}{2 \sin^2\theta_c} - \frac{1}{2} \right]$$

$$X_c = d2 \left[\frac{(1 + \sin\theta_c)}{2 \sin\theta_c} - \frac{\sin\theta_c}{2 \sin\theta_c} \right] \quad \text{soit : } X_c = \frac{d2}{2 \sin\theta_c}$$

La largeur $d1$ de la pupille d'entrée du CPC est égale à $C'C$, soit deux fois X_c , d'où :

$$d1 = \frac{d2}{\sin\theta_c}$$

2.2.2.6 Hauteur du CPC

La hauteur du CPC est donnée par l'ordonnée du point C dans le repère XIY, soit (équation (1)) :

$$Y_c = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c) \cos(\phi - \theta_c)}{1 - \cos\phi} = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c) \cos\theta_c}{1 - \cos 2\theta_c} = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c) \cos\theta_c}{2 \sin^2\theta_c}$$

$$Y_c = \frac{d2}{2 \operatorname{tg}\theta_c} \frac{(1 + \sin\theta_c)}{\sin\theta_c} = \frac{1}{2 \operatorname{tg}\theta_c} \left[\frac{d2}{\sin\theta_c} + d2 \right] \quad Y_c = \frac{d1 + d2}{2 \operatorname{tg}\theta_c}$$

$$\text{soit : } L_{\text{CPC}} = \frac{d1 + d2}{2 \operatorname{tg}\theta_c}$$

2.2.3 CONSIDERATIONS GEOMETRIQUES

Les caractéristiques principales du CPC sont, avec les notations de la figure ci-dessous :

pupille de sortie : d2

$$d2 = \frac{p}{1 + \sin\theta_c} \quad \left(\frac{p}{2} = \text{ focale} \right)$$

pupille d'entrée : d1

$$d1 = \frac{d2}{\sin\theta_c}$$

hauteur du CPC : L

$$L = \frac{d1 + d2}{2 \operatorname{tg}\theta_c}$$

concentration géométrique : C

$$C = \frac{d1}{d2} = \frac{1}{\sin\theta_c}$$

avec θ_c : **angle d'acceptance** du CPC.

Le CPC est parfaitement défini lorsqu'on connaît d2 et θ_c .

Un point M quelconque du CPC est donné par :

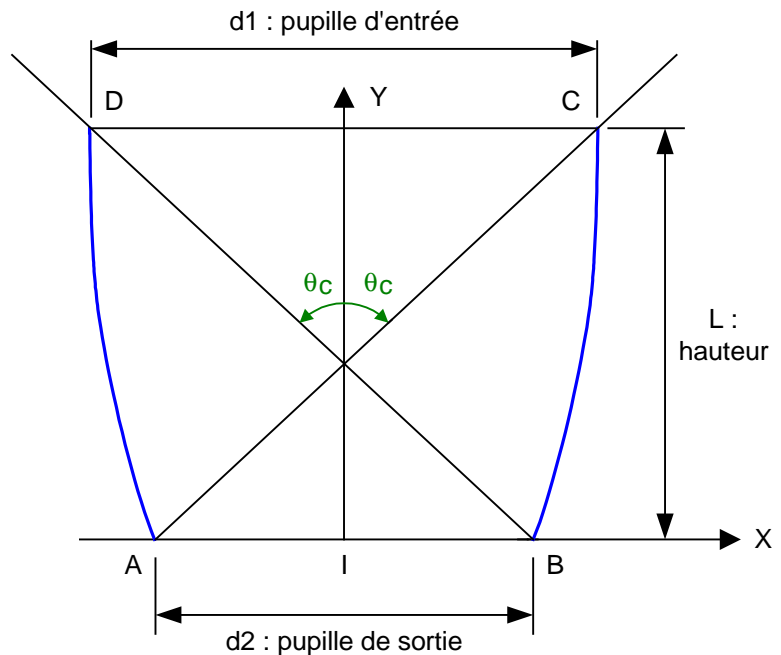
$$X_M = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c) \sin(\phi - \theta_c)}{1 - \cos\phi} - \frac{d2}{2} \quad \text{et} \quad Y_M = d2 \frac{(1 + \sin\theta_c) \cos(\phi - \theta_c)}{1 - \cos\phi}$$

le paramètre ϕ varie de $2\theta_c$ (au point C) à $\frac{\pi}{2} + \theta_c$ (au point B)

Propriété du CPC :

Tous les rayons entrant dans le CPC par la pupille d'entrée sous une incidence comprise entre $\pm \theta_c$ arrivent sur la pupille de sortie, soit directement, soit après une ou plusieurs réflexions sur les parois.

Par contre, un rayon entrant dans le CPC avec une incidence supérieure à θ_c finira par en sortir.



2.2.4 REDUCTION DE LA HAUTEUR

Les surfaces proches de la pupille d'entrée sont quasiment parallèles à l'axe du CPC. Aussi, dans de nombreuses applications où l'axe du CPC est dirigé vers le soleil, ces surfaces ne jouent qu'un rôle négligeable car les rayons incidents sont parallèles entre eux et tangents à cette surface. Pour économiser de la matière, on réduit alors la hauteur du CPC dans certaines proportions (jusqu'à un tiers) sans diminuer les propriétés de l'ensemble.

Dans notre application où les rayons incidents ne sont pas parallèles, on ne peut pas réduire la hauteur du CPC sans diminuer le taux de rayons collectés, c'est à dire le rendement de l'ensemble.

2.3 LE MIROIR CYLINDRO-PARABOLIQUE

2.3.1 DEFINITIONS

Une coupe Est-Ouest de ce miroir est une droite horizontale (voir dessin § 2.1).

Une coupe Nord-Sud de ce miroir est une section de parabole.

La ligne joignant le sommet de la parabole (O) au foyer (F) est appelé "axe focal" (voir dessin ci-dessous). Le plan contenant l'axe focal d'une coupe du miroir et la ligne Est-Ouest est appelé le plan focal du miroir. La ligne des foyers de chaque section de parabole est la ligne focale.

La propriété principale d'une parabole est :

Tout rayon incident parallèle à l'axe d'une parabole est réfléchi en un point unique appelé foyer (F).

Ceci permet d'énoncer la propriété équivalente pour ce miroir :

Tout rayon incident parallèle au plan focal est réfléchi sur la ligne focale.

2.3.2 CALCULS DE BASE SUR LA PARABOLE

2.3.2.1 Calcul de la longueur d'un arc de parabole

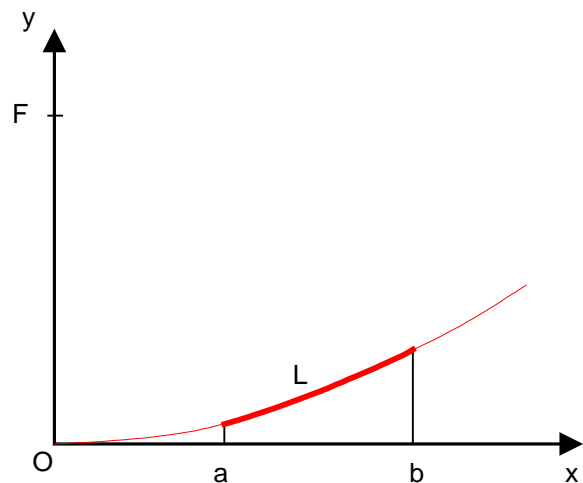
Pour les calculs à suivre, la valeur $(b - a)$ doit être connue. Or elle est conditionnée par la largeur commerciale des tôles constituant le miroir et qui correspond à la longueur L du graphique ci-contre.

L'équation de la parabole est donnée par :

$$y = \frac{x^2}{2p} \quad \text{avec} \quad \frac{p}{2} = OF = \text{focale}$$

La longueur de l'arc entre a et b est donnée par l'abscisse curviligne s telle que :

$$L = \int_a^b ds \quad \text{avec} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$



$$\text{et } dy = \frac{x}{p} dx \quad \text{d'où : } ds^2 = dx^2 \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \quad \text{soit : } ds = dx \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right)^{1/2}$$

$$\text{posons } x = p t \quad \text{donc } t(a) = \frac{a}{p} \quad \text{et } t(b) = \frac{b}{p}$$

$$\text{d'où } dx = p dt \quad \text{et } ds = p (1 + t^2)^{1/2} dt$$

$$\text{en effectuant le changement de variable : } t = \text{sh } \phi$$
$$\text{on a : } \phi = \text{Argsh } t \quad dt = \text{ch } \phi d\phi \quad \text{et} \quad (1 + t^2)^{1/2} = \text{ch } \phi$$

ce qui donne $ds = p \operatorname{ch}^2 \phi d\phi$ soit $L = \int_a^b ds = p \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \operatorname{ch}^2 \phi d\phi = \frac{p}{2} [\phi + \operatorname{sh} \phi \operatorname{ch} \phi]_{\phi(a)}^{\phi(b)}$

en repassant à la variable t : $L = \frac{p}{2} [\operatorname{Argsh} t + t(1+t^2)^{1/2}]_{a/p}^{b/p}$

et à la variable d'origine x : $L = \frac{p}{2} \left[\operatorname{Argsh} \left(\frac{x}{p} \right) + \frac{x}{p} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} \right]_a^b$

Remarque : connaissant la longueur L et la distance a , on ne peut pas calculer b analytiquement. Le calcul doit donc se faire par une méthode itérative.

2.3.2.2 Calcul de l'angle au sommet

L'équation analytique de la droite (D1) est donnée par : $y = m_1 x + b_1$

et pour (D2) : $y = m_2 x + b_2$

L'angle α est alors : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

(D1) passe par $F(0, p/2)$ et par $B(b, y_b = \frac{b^2}{2p})$

donc $m_1 = \frac{b^2 - p^2}{2pb}$

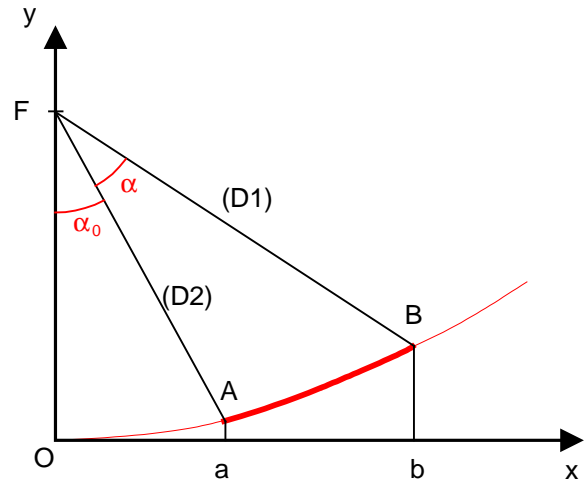
De même (D2) passe par F et par $A(a, y_a = \frac{a^2}{2p})$, donc $m_2 = \frac{a^2 - p^2}{2pa}$

En remplaçant m_1 et m_2 par leur expression : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a^2 - p^2}{2ap} - \frac{b^2 - p^2}{2bp}}{1 + \frac{a^2 - p^2}{2ap} \frac{b^2 - p^2}{2bp}} \quad \text{soit} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b(a^2 - p^2) - a(b^2 - p^2)}{4abp^2 + (a^2 - p^2)(b^2 - p^2)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2p \frac{b(a^2 - p^2) - a(b^2 - p^2)}{4abp^2 + (a^2 - p^2)(b^2 - p^2)} \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} \alpha = 2p \frac{(p^2 + ab)(a - b)}{(p^2 + ab)^2 - p^2(a - b)^2} \quad (\text{II})$$

Calcul de α_0 : dans (II) on fait $a = 0$ et $b = a$, d'où il vient : $\operatorname{tg} \alpha_0 = \left| \frac{2pa}{p^2 - a^2} \right|$



Calcul de $\theta = \alpha_0 + \alpha$: dans (II) on fait $a = 0$:
$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{2pb}{p^2 - b^2} \right|$$

2.3.2.3 Calcul de la distance d'un point de la parabole au foyer

Le calcul de la longueur FM est utile en fonction de p et de l'angle θ .

On a : $FH = FM \cos \theta$ et $OF = \frac{p}{2}$

Par ailleurs : $OH = OF - FH$

soit $OH = \frac{p}{2} - FM \cos \theta$

Le triangle FHM est rectangle en M, d'où :

$$FM^2 = FH^2 + HM^2$$

D'après l'équation de la parabole : $y = \frac{x^2}{2p}$ soit ici :

$OH = \frac{HM^2}{2p}$ donc $HM^2 = 2p \cdot OH$

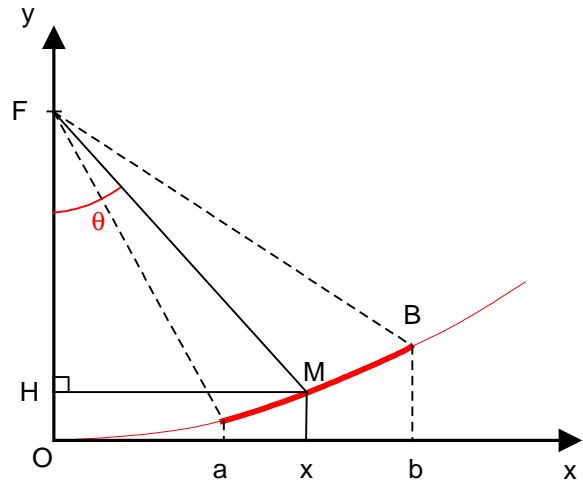
ce qui donne : $FM^2 = FM^2 \cos^2 \theta + 2p \cdot OH$

soit : $FM^2 = FM^2 \cos^2 \theta + p^2 - 2p \cdot FM \cos \theta$ d'où : $FM^2 = (FM \cos \theta - p)^2$

d'où les deux solutions : $FM = FM \cos \theta - p$ et $FM = p - FM \cos \theta$
où seule la seconde solution a un sens (car $p > FM$ et FM est une longueur donc positive)

ce qui donne : $FM (1 + \cos \theta) = p$ soit : $FM = \frac{p}{1 + \cos \theta}$

En passant, on a aussi : $x = HM = FM \sin \theta$, soit : $x = p \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$: équation polaire de la parabole.



2.3.3 CALCULS DU SUIVI DU SOLEIL

Pour les calculs suivants, les grandeurs astronomiques utiles sont :

- la déclinaison (δ), de période annuelle, due à la combinaison de la trajectoire de la terre autour du soleil et de l'inclinaison de son axe de rotation.
- la latitude (ϕ), angle que fait la verticale du lieu avec le plan de l'équateur.
- l'angle horaire (ω), dû à la rotation de la terre sur son axe.

L'angle horaire est donné par : $\omega = 15 (12 - t)$

où : ω est exprimé en degrés et t en heures en temps solaire vrai (TSV).

A midi solaire du lieu $t = 12$ heures et $\omega = 0$.

L'angle de hauteur (h) est donné par la formule suivante :

$$\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega \quad (1)$$

et l'azimut par :

$$\sin a = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos h} \quad (2)$$

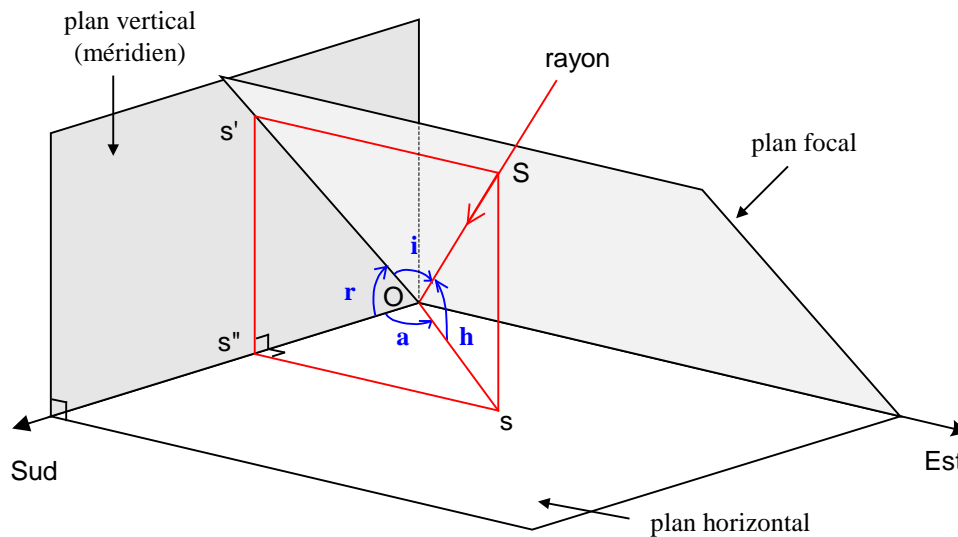
et

$$\cos a = \frac{-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos \omega}{\cos h} \quad (3)$$

Pour concentrer les rayons du soleil il faut orienter le miroir correctement suivant la hauteur du soleil. Comme le miroir ne peut pivoter qu'autour d'un axe orienté Est-Ouest, son orientation correcte consiste à incliner le plan focal d'un angle r en fonction de la hauteur du soleil de façon à ce que ses rayons soient contenu dans ce plan (ou dans les plans parallèles à celui-ci).

Sur la figure ci-dessous, on a représenté les quatre angles principaux qui sont :

- r : angle de réglage : inclinaison du plan focal sur le plan horizontal du lieu.
- h : angle de hauteur (hauteur du soleil sur l'horizon)
- a : azimut (angle entre le plan méridien du lieu - direction du sud - et la direction du soleil)
- i : angle d'incidence (angle du soleil par rapport au plan vertical projeté sur le plan focal)



L'angle r est la projection de la hauteur du soleil (h) sur le plan méridien.
Sur ce dessin, le rayon rouge est contenu dans le plan focal.

2.3.3.1 Calcul de l'angle de réglage

Sur la figure précédente, on a :

$$\operatorname{tg} r = \frac{S'S''}{Os''} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} h = \frac{Ss}{Os} \quad \text{et} \quad s's'' = Ss \quad \text{d'où : } \operatorname{tg} r = \frac{Os}{Os''} \operatorname{tg} h$$

$$\text{or } \frac{Os}{Os''} = \frac{1}{\cos a} \quad \text{donc : } \operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg} h}{\cos a} \quad (I)$$

soit:
$$\operatorname{tg} r = \frac{\sin h}{\cos h \cos a}$$

en remplaçant h et a par leur expression (1), (2) et (3) :
$$\operatorname{tg} r = \frac{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega}{-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos \omega}$$

en divisant cette expression par $(\sin \delta \cos \phi)$:
$$\operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg} \phi + \frac{\cos \omega}{\operatorname{tg} \delta}}{-1 + \operatorname{tg} \phi \frac{\cos \omega}{\operatorname{tg} \delta}}$$

posons $\operatorname{tg} r_1 = \frac{\cos \omega}{\operatorname{tg} \delta}$, on a alors :
$$\operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg} \phi + \operatorname{tg} r_1}{-1 + \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} r_1} = -\operatorname{tg}(\phi + r_1) = \operatorname{tg}(-\phi - r_1)$$

soit : $r = -\phi - r_1$

posons $r_0 = -r_1$: donc $\operatorname{tg} r_0 = -\operatorname{tg} r_1 = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{tg} \delta} = -\cos \omega \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos \omega \operatorname{tg}\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right)$

on a alors :

$$r = r_0 - \phi \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg} r_0 = \cos \omega \operatorname{tg}\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{II})$$

où r_0 est indépendant de la latitude.

Aux équinoxes, on a : $\delta = 0$ (par définition), donc $\operatorname{tg}\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \infty$

donc $r_0 = \frac{\pi}{2} \quad \forall \cos \omega \neq 0$ ($\cos \omega = 0$ correspond à $w = \pm \frac{\pi}{2}$, c'est à dire à 6 et 18 heures TSV)

Il n'y a donc pas de réglage dans la journée les jours d'équinoxes.

En réalité δ varie de $0,3^\circ$ dans la journée, donc ce jour là $r_0 = 90^\circ \pm 0,15^\circ$.

Aux solstices, la variation de la déclinaison δ au cours d'une journée est minimale (environ $8''$ d'arc en 24 heures). on peut donc considérer que $\frac{1}{\operatorname{tg} \delta}$ est constante au cours de la journée.

$\delta = \pm 23.45^\circ$, soit $\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \pm 2,3$, donc : $\operatorname{tg} r_0 = 2,3 \cos \omega$ au solstice d'été

et $\operatorname{tg} r_0 = -2,3 \cos \omega$ au solstice d'hiver

2.3.3.2 Calcul de l'angle d'incidence

Sur la figure précédente, on a :

$$\operatorname{tg} i = \frac{Ss'}{Os'} \quad \operatorname{tg} a = \frac{ss''}{Os''} \quad \cos r = \frac{Os''}{Os'} \quad \text{et} \quad Ss' = ss'' \quad \text{d'où : } \operatorname{tg} i = \frac{ss''}{Os'} = \frac{ss''}{Os''} \frac{Os''}{Os'}$$

soit : $\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} a \cos r \quad (\text{III})$

exprimons r en fonction de l'azimut et de la hauteur :

$$\cos^2 r = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 r} \quad \text{et d'après (I) :} \quad \cos^2 r = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 h}{\cos^2 a}} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 h}$$

$$\text{donc (III) :} \quad \operatorname{tg}^2 i = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 h} = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 h}$$

$$\text{en divisant par } \sin^2 a : \quad \operatorname{tg}^2 i = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 a} + \frac{\operatorname{tg}^2 h}{\sin^2 a}} = \frac{1}{\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right)^2 + \left(\frac{\sin h}{\cos h \sin a}\right)^2} = \frac{1}{A^2 + B^2}$$

$$A = \frac{\cos a}{\sin a} \quad \text{d'après (2) et (3) :} \quad A = \frac{-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos \omega}{\cos \delta \sin \omega}$$

$$\text{d'où :} \quad A^2 = \frac{\sin^2 \delta \cos^2 \phi + \cos^2 \delta \sin^2 \phi \cos^2 \omega - 2 \sin \delta \cos \delta \sin \phi \cos \phi \cos \omega}{\cos^2 \delta \sin^2 \omega}$$

$$B = \frac{\sin h}{\cos h \sin a} \quad \text{d'après (1) et (2) :} \quad B = \frac{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega}{\cos \delta \sin \omega}$$

$$\text{d'où :} \quad B^2 = \frac{\sin^2 \delta \sin^2 \phi + \cos^2 \delta \cos^2 \phi \cos^2 \omega + 2 \sin \delta \cos \delta \sin \phi \cos \phi \cos \omega}{\cos^2 \delta \sin^2 \omega}$$

$$\text{et } A^2 + B^2 = \frac{\sin^2 \delta \cos^2 \phi + \cos^2 \delta \sin^2 \phi \cos^2 \omega + \sin^2 \delta \sin^2 \phi + \cos^2 \delta \cos^2 \phi \cos^2 \omega}{\cos^2 \delta \sin^2 \omega}$$

$$A^2 + B^2 = \frac{\sin^2 \delta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \delta \cos^2 \omega (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)}{\cos^2 \delta \sin^2 \omega} = \frac{\sin^2 \delta + \cos^2 \delta \cos^2 \omega}{\cos^2 \delta \sin^2 \omega}$$

$$\text{d'où :} \quad \operatorname{tg}^2 i = \frac{\cos^2 \delta \sin^2 \omega}{\sin^2 \delta + \cos^2 \delta \cos^2 \omega} \quad \text{et en divisant par } \cos^2 \omega : \quad \operatorname{tg}^2 i = \frac{\sin^2 \omega}{\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \omega}$$

$$\text{en exprimant l'angle } i \text{ par son cosinus, on a :} \quad \cos^2 i = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \omega}{\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \omega}}$$

$$\text{ou :} \quad \cos^2 i = \frac{\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \omega}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = (\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \omega) \cos^2 \delta = \cos^2 \omega \cos^2 \delta + \sin^2 \delta$$

$$\text{ou encore :} \quad \cos^2 i = \cos^2 \omega \cos^2 \delta + 1 - \cos^2 \delta \quad \text{soit :} \quad \cos^2 i = 1 + \cos^2 \delta (\cos^2 \omega - 1)$$

$$\text{donc} \quad \cos^2 i = 1 - \cos^2 \delta \sin^2 \omega$$

$$\text{ce qui donne, après ce morceau de bravoure :} \quad \cos i = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \delta \sin^2 \omega} \quad \text{(IV)}$$

Cette formule montre que :

- l'angle d'incidence est indépendant de la latitude (l'angle ϕ a disparu de la formule).
- au midi solaire : $\omega = 0$ donc $\sin \omega = 0$ et $\cos i = 1$, donc $i = 0$: l'angle d'incidence est nul.
- à 9H00 ou à 15H00 en temps solaire vrai, $\omega = \pm 45^\circ$ donc $\sin^2 \omega = 0,5$

Aux équinoxes, on a : $\delta = 0$ (par définition), donc $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 \omega} = \cos \omega$

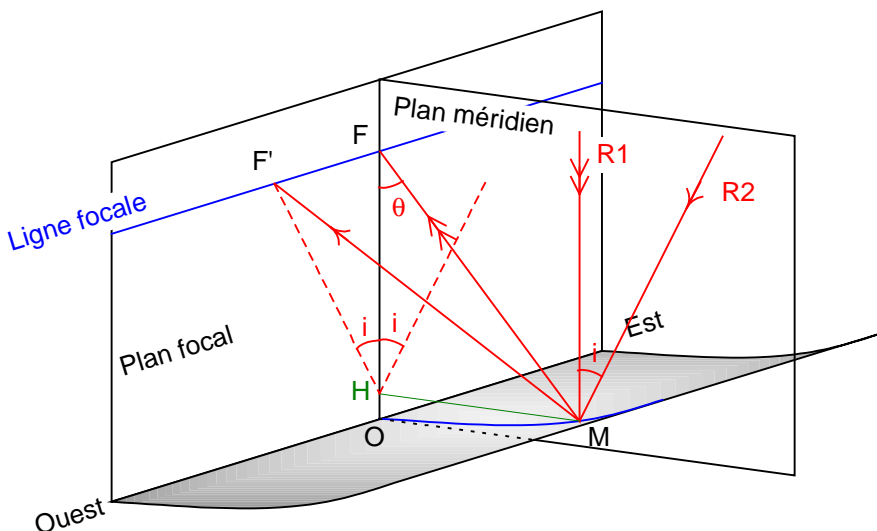
soit $i = \omega$ l'angle d'incidence est égal à l'angle horaire : le soleil se déplace dans un plan.

2.3.3.3 Calcul de la longueur du rayon réfléchi

Lorsque le soleil arrive avec une incidence non nulle sur le miroir, c'est à dire à une heure quelconque différente du midi solaire, le rayon réfléchi n'est pas contenu dans un plan perpendiculaire au plan focal.

De ce fait, le point de réflexion sur la ligne focale est décalé par rapport au point de réflexion au midi solaire. La connaissance de ce décalage définit les caractéristiques du capteur.

Le schéma suivant illustre ce décalage .



Le rayon R1 est dans le plan méridien : il est midi solaire. Il se réfléchit sur la ligne focale sur le plan méridien en F.

Le rayon R2 arrive sur le miroir avec une incidence i et se réfléchit sur la ligne focale en F'.

La ligne rouge en pointillés est la projection du rayon R2 sur le plan focal.

Le déplacement du foyer est la longueur FF'.

La longueur du rayon réfléchi arrivant en un point M du miroir est F'M.

Le point H de la figure est la projection orthogonale du point M sur le plan focal.

On a la relation : $\operatorname{tg} i = \frac{FF'}{FH}$ avec $FH = FM \cos \theta$

avec $FM = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ (expression calculée au § 2.3.2.3)

Le **déplacement du foyer** pour un rayon arrivant en un point M quelconque du miroir est donc :

$$FF' = FM \cos \theta \operatorname{tg} i \quad \text{soit} \quad FF' = \frac{p \cos \theta}{1 + \cos \theta} \operatorname{tg} i$$

La longueur du rayon réfléchi est F'M. Le triangle F'FM est rectangle en F.

On a donc : $F'M^2 = F'F^2 + FM^2$ avec $F'F = FM \cos \theta \operatorname{tg} i$

soit : $F'M^2 = FM^2 (\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 i + 1)$ donc $F'M = FM \sqrt{\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 i + 1}$

soit au final : $F'M = \frac{P}{1 + \cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 i + 1}$

Le rayon réfléchi le plus court est le rayon $OF = \frac{P}{2}$ (incidence normale à midi).

On peut définir un **facteur d'allongement** k tel que : $F'M = k OF$

$$\text{avec } k = \frac{2}{1 + \cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 i + 1}$$

Le facteur d'allongement maximum est obtenu pour $\operatorname{tg} i$ maximum, soit pour i_{\max} , donc pour $\delta = 0$.

A 9 heures solaires, $i_{\max} = 45^\circ$ (voir § 2.3.3.2), soit $\operatorname{tg} i_{\max} = 1$.

On a alors : $k_{\max} = \frac{2}{1 + \cos \theta_{\max}} \sqrt{\cos^2 \theta_{\max} + 1}$ et $FF'_{\max} = \frac{p \cos \theta_{\max}}{1 + \cos \theta_{\max}}$

2.3.4 CALCULS RELATIFS A LA TACHE FOCAL

Dans tout ce qui précède, le soleil est considéré comme ponctuel. Dans ce cas, si le miroir est parfaitement orienté (le plan focal est parallèle aux rayons incidents), les rayons réfléchis forment une ligne infiniment mince confondue avec la ligne focale.

Or, lorsqu'on regarde le soleil à l'œil nu (ce qui est fortement déconseillé sans protection), il apparaît comme un disque et non comme un point. Le diamètre de ce disque est appelé diamètre apparent du soleil et est exprimé sous forme angulaire : c'est l'angle formé par notre œil et les bords du disque solaire.

Le diamètre apparent du soleil est de 32 minutes d'arc.

De ce fait, même avec un miroir parfaitement orienté, les rayons réfléchis forment un ruban plus ou moins large autour de la ligne focale.

Les calculs suivants ont pour but de déterminer la largeur de ce ruban afin de dimensionner correctement le CPC pour que tous les rayons réfléchis passent dans sa pupille d'entrée.

2.3.4.1 Calcul de la largeur de la tache focale à midi

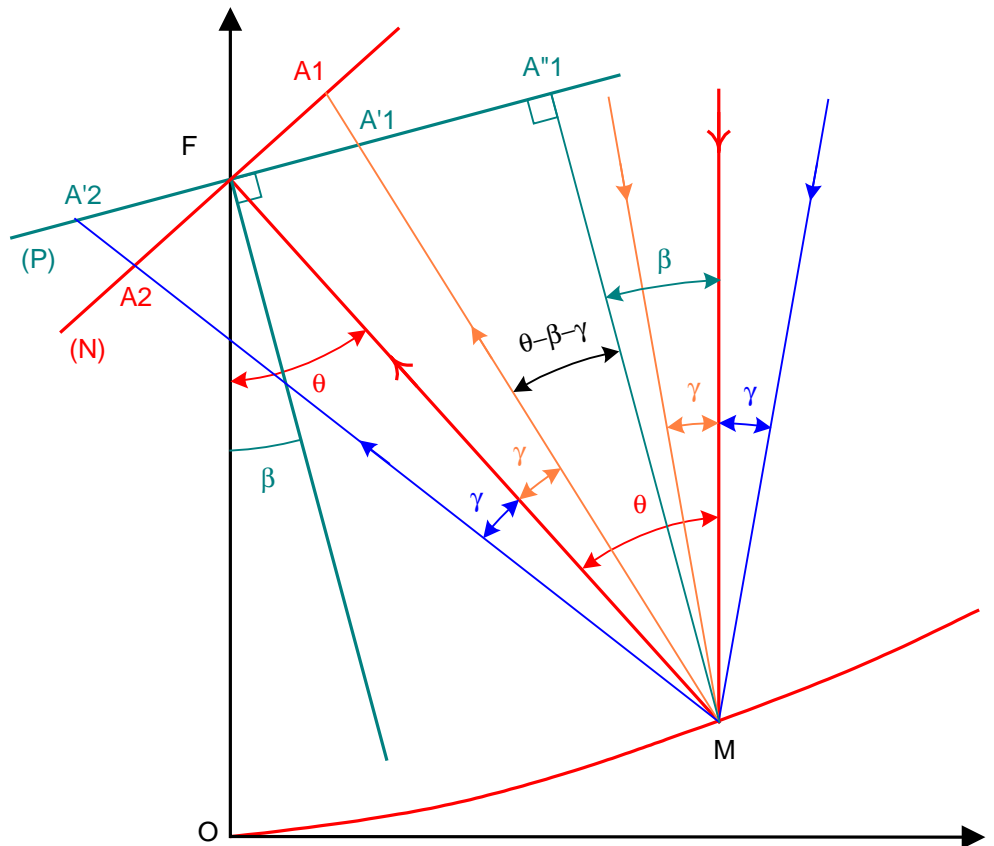
Une coupe suivant un plan vertical orienté sud permet de dessiner la figure suivante où le rayon rouge arrive au point M du miroir parallèlement à l'axe de la parabole. Il est réfléchi au foyer F. Ce rayon correspond à un rayon issu du centre du disque solaire. Tous les calculs précédents ont été faits avec ce rayon.

Un rayon issu du bord du disque solaire, comme le rayon en orange, fait un angle γ avec le rayon rouge.

Il est réfléchi en A1 sur un plan représenté par la ligne (N) perpendiculaire à FM.

Un rayon issu de l'autre bord du disque solaire (dessiné en bleu) est réfléchi en A2 sur la même ligne (N).

Sur la figure, les angles γ sont très fortement exagérés par rapport à la réalité, puisque γ fait seulement 16' d'arc (et représenté ici par 10°).



On considère que le plan de réception des rayons réfléchis est le plan représenté par la ligne (P). La normale à ce plan (donc la perpendiculaire à (P)) fait un angle β avec l'axe de la parabole.

La largeur de la tache focale à calculer est donc la largeur sur le plan de réception, ce qui correspond au segment A'1A'2.

On a la relation suivante : $\text{tg } \gamma = \frac{FA1}{FM} = \frac{FA2}{FM}$ donc $FA1 = FA2 = FM \text{ tg } \gamma$

Ce qui donne : $A1A2 = 2 FM \text{ tg } \gamma$ avec $FM = \frac{P}{1 + \cos \theta}$ (calculé au § 2.3.2.3)

Notons P_0 cette valeur : $P_0 = A1A2 = 2 FM \text{ tg } \gamma$

P_0 est la largeur de la tache focale projetée sur un plan normal au rayon réfléchi.

On a aussi : $FA'1 = FA''1 - A'1A''1$ avec : $FA''1 = FM \sin(\theta - \beta)$
 et : $A'1A''1 = A''1M \text{ tg}(\theta - \beta - \gamma)$

et bien sûr : $A''1M = FM \cos(\theta - \beta)$

$$\text{d'où : } FA'1 = FM [\sin(\theta - \beta) - \cos(\theta - \beta) \operatorname{tg}(\theta - \beta - \gamma)]$$

$$\text{On calcule de même } FA'2 : A'2F = A'2A''1 - FA''1 \quad \text{avec : } A'2A''1 = A''1M \operatorname{tg}(\theta - \beta + \gamma)$$

$$\text{d'où : } A'2F = FM [\cos(\theta - \beta) \operatorname{tg}(\theta - \beta + \gamma) - \sin(\theta - \beta)]$$

$$\text{La projection de la tache solaire sur (P) est alors : } P = A'1A'2 = FA'1 + A'2F$$

$$\text{soit } P = FM \cos(\theta - \beta) [\operatorname{tg}(\theta - \beta + \gamma) - \operatorname{tg}(\theta - \beta - \gamma)]$$

$$\text{Rappel : } \operatorname{tg}(a+b) - \operatorname{tg}(a-b) = 2 \frac{\operatorname{tg} b (1 + \operatorname{tg}^2 a)}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b} \quad \text{et} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\text{donc : } P = 2 FM \cos(\theta - \beta) \frac{\operatorname{tg} \gamma (1 + \operatorname{tg}^2 (\theta - \beta))}{1 - \operatorname{tg}^2 (\theta - \beta) \operatorname{tg}^2 \gamma} = 2 FM \frac{1}{\cos(\theta - \beta)} \frac{\operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}^2 (\theta - \beta) \operatorname{tg}^2 \gamma}$$

$$\text{d'où le rapport } \frac{P}{P_0} = \frac{1}{\cos(\theta - \beta) [1 - \operatorname{tg}^2 (\theta - \beta) \operatorname{tg}^2 \gamma]}$$

Compte tenu du diamètre apparent du soleil, il est possible de simplifier cette formule sans faire une erreur importante.

$$\text{On a : } \gamma = 16 \text{ minutes d'arc} = 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ radians} \quad \text{donc } \operatorname{tg} \gamma = \gamma \quad \text{et } \operatorname{tg}^2 \gamma = 2,2 \cdot 10^{-5}$$

Pour maximiser la valeur de $\operatorname{tg}(\theta - \beta)$, il faut un angle θ maximum et un angle β minimum.

Pour un angle θ maximum de 60° et un angle β minimum de 0° , la valeur de $\operatorname{tg}(\theta - \beta)$ est de 1,73 et son carré est égal à 3.

$$\text{On a alors : } \operatorname{tg}^2 (\theta - \beta) \operatorname{tg}^2 \gamma = 6,6 \cdot 10^{-5} \quad \text{et donc : } [1 - \operatorname{tg}^2 (\theta - \beta) \operatorname{tg}^2 \gamma] \approx 1$$

L'expression précédente devient alors, avec une très bonne approximation :

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{\cos(\theta - \beta)} \quad \text{et} \quad P = 2 FM \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos(\theta - \beta)}$$

2.3.4.2 Angle qui minimise la largeur de la tache focale à midi

Le calcul précédent donne la largeur de la tache focale P projetée sur un plan faisant un angle β avec l'axe de la parabole et issue d'un rayon arrivant en un point M quelconque du miroir.

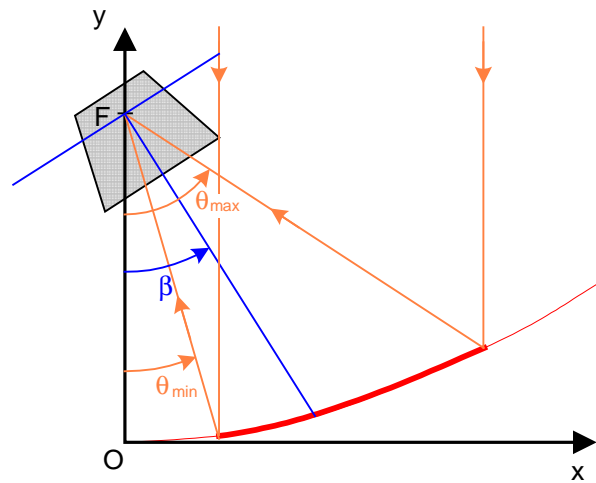
$$P = 2 FM \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos(\theta - \beta)} \quad \text{soit :} \quad P = \frac{2 p \operatorname{tg} \gamma}{(1 + \cos \theta)} \frac{1}{\cos(\theta - \beta)}$$

Pour un seul point d'arrivée, la valeur de β qui minimise la largeur de la tache est bien sûr : $\beta = \theta$ car alors $\cos(\theta - \beta) = 1$.

Mais suivant le point d'arrivée du rayon incident sur le miroir, l'angle θ varie, faisant varier P. Or pour notre capteur, le plan de réception doit être fixe, c'est à dire que β doit être constant. Il faut alors trouver la valeur de l'angle β qui minimise globalement la tache focale pour tous les rayons incidents.

Dans le cas général, ce calcul est complexe.

Comme expliqué au § 2.1, le sommet de la parabole ne fait pas partie du miroir. Elle est ôtée à cause de l'ombre que ferait le CPC sur cette partie comme le montre le dessin ci-contre.



Le miroir est donc caractérisé par :

- l'angle θ_{\min} que fait le bord le plus rapproché du sommet avec l'axe de la parabole (ce bord est appelé **rive nord**).
- l'angle θ_{\max} que fait le bord le plus éloigné du sommet avec l'axe de la parabole (ce bord est appelé **rive sud**).

Nous allons d'abord calculer l'angle β optimal au midi solaire (β_0), ce qui correspond aux calculs précédents.

Pour une valeur de β donnée, si l'on trace la largeur de la tache focale en fonction de θ compris entre θ_{\min} et θ_{\max} , on obtient le graphique suivant.

L'angle optimal β_0 est celui qui minimise la tache focale pour les rayons extrêmes du miroir, c'est à dire tel que :

$$P(\theta_{\min}) = P(\theta_{\max})$$

avec :

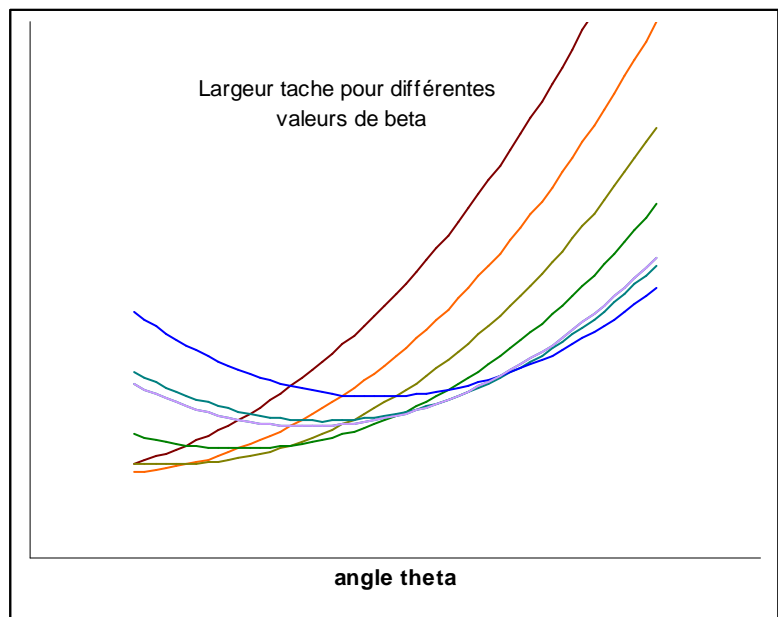
$$P(\theta) = 2 \frac{p}{1 + \cos \theta} \frac{\text{tg } \gamma}{\cos(\theta - \beta)}$$

ce qui donne :

$$2 \frac{p}{1 + \cos \theta_{\min}} \frac{\text{tg } \gamma}{\cos(\theta_{\min} - \beta_0)} = 2 \frac{p}{1 + \cos \theta_{\max}} \frac{\text{tg } \gamma}{\cos(\theta_{\max} - \beta_0)}$$

$$\text{soit : } (1 + \cos \theta_{\min}) \cos(\theta_{\min} - \beta_0) = (1 + \cos \theta_{\max}) \cos(\theta_{\max} - \beta_0)$$

pour simplifier l'écriture posons $k_1 = (1 + \cos \theta_{\min})$ et $k_2 = (1 + \cos \theta_{\max})$



$$\text{soit : } k_1 \cos(\theta_{\min} - \beta_0) = k_2 \cos(\theta_{\max} - \beta_0)$$

$$\text{et développons : } k_1 \cos\theta_{\min} \cos\beta_0 + k_1 \sin\theta_{\min} \sin\beta_0 = k_2 \cos\theta_{\max} \cos\beta_0 + k_2 \sin\theta_{\max} \sin\beta_0$$

$$\sin\beta_0 (k_1 \sin\theta_{\min} - k_2 \sin\theta_{\max}) = \cos\beta_0 (k_2 \cos\theta_{\max} - k_1 \cos\theta_{\min})$$

$$\text{soit : } \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{k_2 \cos\theta_{\max} - k_1 \cos\theta_{\min}}{k_1 \sin\theta_{\min} - k_2 \sin\theta_{\max}} \quad \text{avec } k_1 = (1 + \cos \theta_{\min}) \text{ et } k_2 = (1 + \cos \theta_{\max})$$

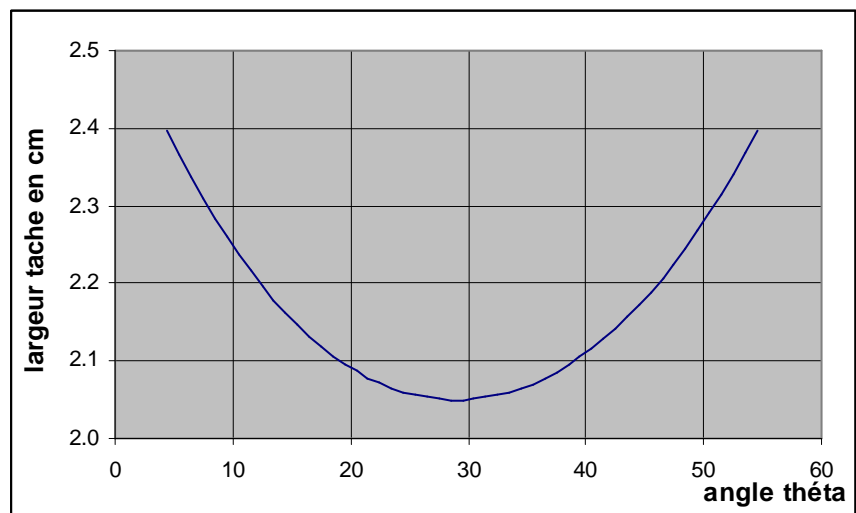
La largeur totale de la tache est minimisée et on a :

$$P_{\text{opt}} = 2 p \operatorname{tg} \gamma k_0 \quad \text{avec } k_0 = \frac{1}{(1 + \cos \theta_{\min}) \cos(\theta_{\min} - \beta_0)}$$

A titre d'exemple, pour un miroir de 2 mètres de focale ($p = 4 \text{ m}$) et d'angles extrêmes $\theta_{\min} = 4,5^\circ$ et $\theta_{\max} = 54,5^\circ$, on a les valeurs suivantes :

- $\beta_0 = 43,5^\circ$
- $k_0 = 0,644$
- $P_{\text{opt}} = 2,4 \text{ cm}$

et la largeur en fonction de θ est montrée par le graphique ci-contre.



2.3.4.3 Calcul de la largeur maximale de la tache focale

On conçoit aisément qu'en dehors du midi solaire, la tache focale sera plus large car les rayons réfléchis sont plus longs (voir le § 2.3.3.3). Sur la figure de ce paragraphe, on voit aussi que la géométrie du problème n'est pas changée : le rayon est réfléchi en F' au lieu de F, mais toujours sur la ligne focale.

Le calcul se conduit de la même façon avec le rayon réfléchi F'M au lieu de FM, soit :

$$P' = \frac{2 p \operatorname{tg} \gamma}{(1 + \cos \theta)} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 i + 1}}{\cos(\theta - \beta)}$$

Si on limite l'utilisation du capteur à ± 3 heures autour du midi solaire, la valeur la plus grande de l'angle i sera de $\pm 45^\circ$ (valeur atteinte aux équinoxes) et on a alors $\operatorname{tg}^2 i = 1$.

La valeur sous le radical varie donc de 1 (pour $i = 0$, soit $\operatorname{tg} i = 0$) à 2 (pour $i = 45^\circ$ et $\theta = 0$), la plus grande valeur étant obtenue pour $i = 45^\circ$.

La largeur maximale sera donc obtenue pour l'angle d'incidence maximum, c'est à dire pour les heures les plus éloignées du midi solaire.

2.3.4.4 Angle qui minimise la largeur de la tache focale en dehors de midi

Un raisonnement identique à celui effectué au §2.3.4.2 permet à partir de : $P'(\theta_{\min}) = P'(\theta_{\max})$

$$\text{de poser : } k'1 = \frac{1 + \cos \theta_{\min}}{\sqrt{\cos^2 \theta_{\min} \operatorname{tg}^2 i + 1}} \quad \text{et} \quad k'2 = \frac{1 + \cos \theta_{\max}}{\sqrt{\cos^2 \theta_{\max} \operatorname{tg}^2 i + 1}}$$

ce qui donne : $k'1 \cos(\theta_{\min} - \beta'_0) = k'2 \cos(\theta_{\max} - \beta'_0)$ (équation identique à la précédente)

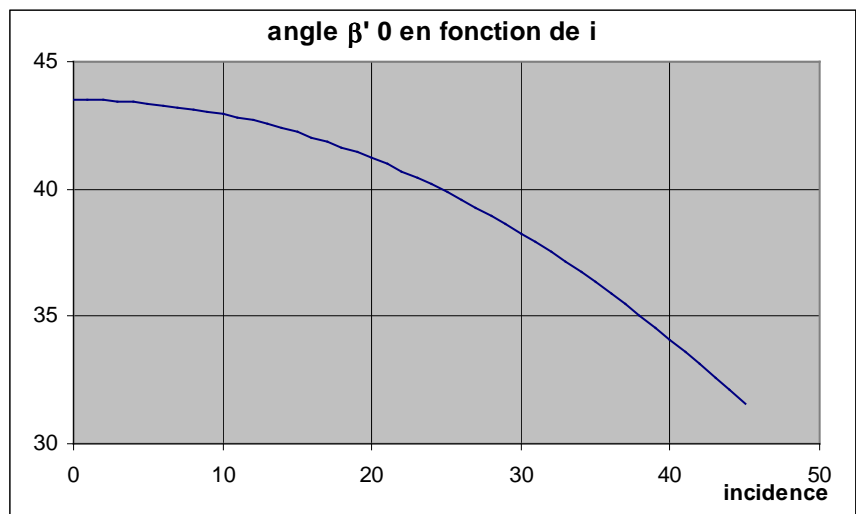
$$\text{donc : } \operatorname{tg} \beta'_0 = \frac{k'2 \cos \theta_{\max} - k'1 \cos \theta_{\min}}{k'1 \sin \theta_{\min} - k'2 \sin \theta_{\max}}$$

$$\text{et : } P_{\text{opt}} = 2 p \operatorname{tg} \gamma k'_0 \quad \text{avec} \quad k'_0 = \frac{\sqrt{\cos^2 \theta_{\min} \operatorname{tg}^2 i + 1}}{(1 + \cos \theta_{\min}) \cos(\theta_{\min} - \beta'_0)}$$

Dans l'expression de $k'1$ et $k'2$ l'angle d'incidence i intervient. De ce fait les valeurs de $k'1$ et $k'2$ varient au cours de la journée entraînant la variation de l'angle β'_0 et de la largeur de la tache focale.

Si l'on trace la variation de l'angle β'_0 en fonction de l'angle d'incidence i , on obtient le graphique ci-contre pour des valeurs raisonnables de i .

Avec les mêmes valeurs que ci-dessus, l'angle β'_0 est égal à β_0 ($43,5^\circ$) pour $i = 0$ (midi solaire) et descend jusqu'à $31,5^\circ$ pour $i = \pm 45^\circ$ (9 heures et 15 heures solaires).



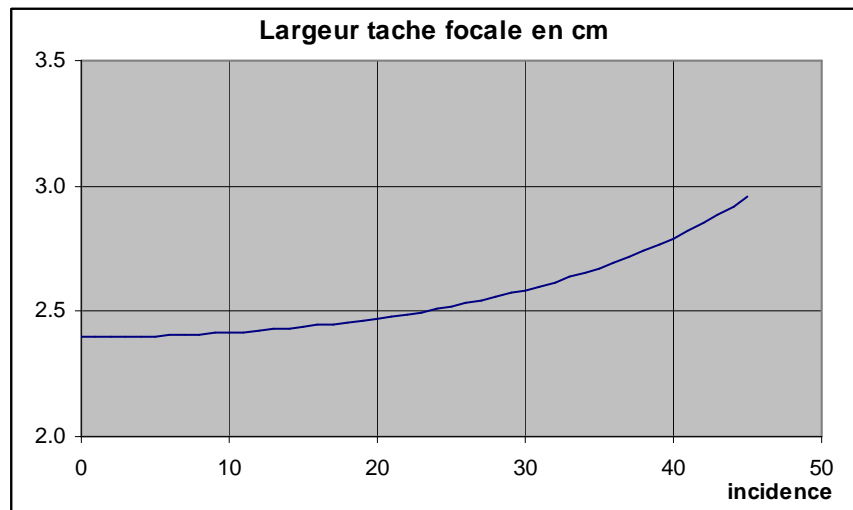
Mais on aura toujours, pour une valeur de β'_0 donnée, une largeur de tache maximale aux plus grands angles d'incidence (c'est à dire aux heures les plus éloignées du midi solaire).

Pour minimiser la largeur la plus grande de la tache focale, il faut donc calculer l'angle β'_0 pour l'incidence la plus grande, soit pour $\operatorname{tg}^2 i = 1$ (soit $\beta'_0 = 31,5^\circ$ sur cet exemple).

Le graphique ci-contre montre la variation de la largeur maximale de la tache focale pour lorsque l'angle β'_0 est optimisé au cours de la journée.

Elle passe de la valeur minimum de 2,4 cm à midi solaire à la valeur maximum de 2,95 cm à 9 et 15 heures.

Lorsque β'_0 est fixe et égal à $31,5^\circ$, la largeur de la tache passe de 2,95 cm à 9 et 15 heures à 2,55 cm à midi.



2.3.4.5 Choix de construction

Pour minimiser la largeur de la tache focale tout au long de la journée, il faudrait donc faire varier l'angle β'_0 entre deux valeurs ($31,5^\circ$ et $43,5^\circ$ sur l'exemple ci-dessus), soit par un asservissement, soit par un réglage manuel. Ceci reviendrait à faire basculer plus ou moins le CPC autour de son axe (en fait autour de l'axe focal du capteur) et va à l'encontre de la simplicité de construction et de manœuvre du capteur, d'autant que la valeur minimale varie tout au long de l'année.

La simplicité recherchée impose que le capteur forme un ensemble rigide pouvant seulement pivoter autour d'un axe est-ouest.

Ceci revient à figer l'angle β_0 pour une construction donnée.

Un choix s'impose donc sur la valeur de cet angle :

- 1 - soit en minimisant la tache focale aux heures extrêmes d'utilisation (le matin et le soir),
- 2 - soit en minimisant la tache focale à midi où l'énergie récupérable est la plus forte,
- 3 - soit faire un compromis entre ces deux valeurs,
- 4 - soit choisir une autre solution.

Le premier choix donne un angle de $31,5^\circ$ et une largeur de tache variant de 2,95 cm à 2,55 cm au cours de la journée.

Le deuxième choix donne un angle de $43,5^\circ$ et une largeur de tache variant de 3,39 cm à 2,40 cm au cours de la journée.

Avec cette solution l'élargissement de la tache est de $(3,39 / 2,95)$, soit environ 1,15 (c'est à dire 15%) aux heures de grande incidence. Il faudrait affiner le calcul pour voir si l'énergie totale récupérée au cours de la journée est maximisée, ce qui n'est pas évident.

En fait, c'est une autre solution qui a été choisie, basée sur la considération suivante.

Le capteur est constitué de l'association d'un miroir primaire et d'un CPC.

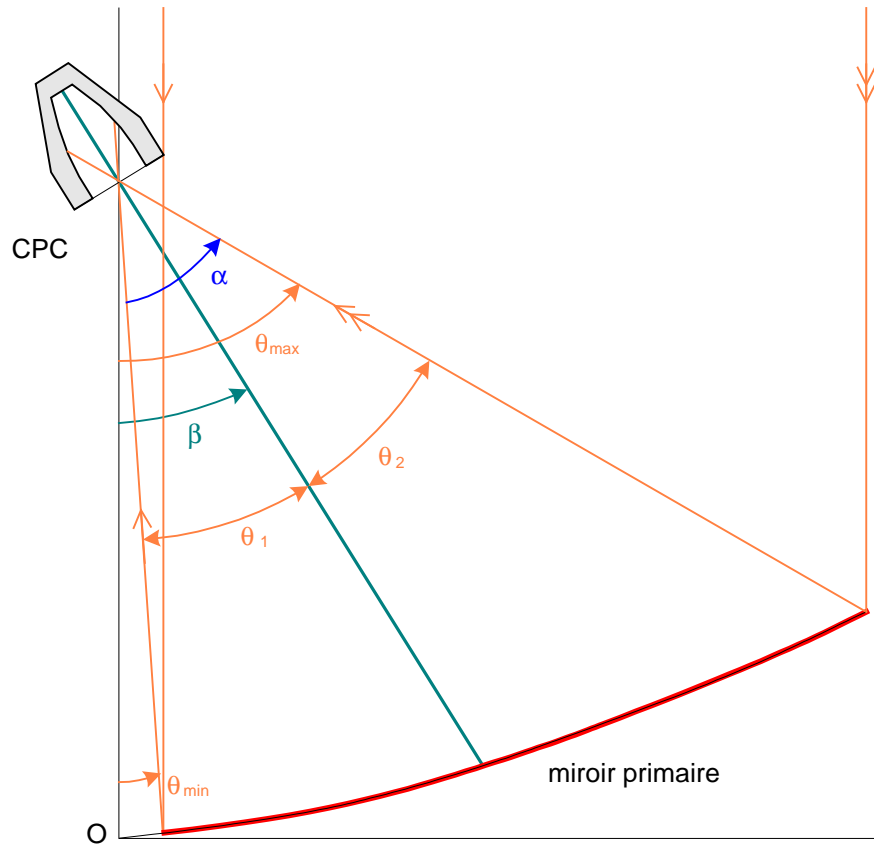
Le miroir primaire renvoie tous les rayons au foyer. Les rayons extrêmes "rive nord" et "rive sud" forment un angle α qui doit être au plus égal à deux fois l'angle d'acceptance du CPC ($2\theta_c$ - voir § 2.2.3) pour que ces rayons se retrouvent concentrés au fond du CPC.

On appelle **plan bissecteur**, le plan (représenté ici par la ligne bleu-vert) passant par le foyer qui fait un angle β avec l'axe du miroir, tel qu'il divise le miroir en deux angles égaux :

$$\theta_1 = \theta_2$$

On a donc :
$$\beta = \frac{\theta_{\min} + \theta_{\max}}{2}$$

Avec un CPC symétrique, il faut que son axe soit confondu avec le plan bissecteur du miroir et que le milieu de sa pupille d'entrée soit placée au foyer du miroir pour que tous les rayons entrant se retrouvent sur la pupille de sortie.



La largeur de la tache est alors :
$$P = 2 p \operatorname{tg} \gamma k_{\beta}$$

avec
$$k_{\beta} = \frac{\sqrt{\cos^2 \theta_{\min} \operatorname{tg}^2 i + 1}}{(1 + \cos \theta_{\min}) \cos(\theta_{\min} - \beta)}$$
 et
$$\beta = \frac{\theta_{\min} + \theta_{\max}}{2}$$

Ce qui donne pour l'exemple ci-dessus : $\beta = 29,5^\circ$ et $P_{\max} = 3,00 \text{ cm}$ à 9 et 15 heures et 2,60 cm à midi.

On remarque que la différence n'est pas très grande par rapport à la première solution.

Dans une configuration différente, il faudrait un CPC ayant un angle d'acceptance plus grand, donc une concentration géométrique plus faible, ou bien que le CPC soit dissymétrique, ce qui complique singulièrement sa fabrication.

Cette solution semble le meilleur compromis entre l'élargissement de la tache et la simplicité de fabrication du capteur.

C'est donc cette solution qui a été retenue pour ce capteur.

2.3.5 CALCULS SUR LA DEFOCALISATION DES RAYONS

Le capteur décrit ci-dessus doit suivre constamment le soleil de façon que les rayons incidents arrivent toujours parallèlement à l'axe du miroir primaire. Ceci oblige, dans l'absolu, à asservir le capteur et va à l'encontre du but recherché qui est le maximum de simplicité dans sa fabrication et dans sa conduite.

Pour simplifier la conduite du capteur, l'idée de base est d'augmenter raisonnablement la largeur de la pupille d'entrée du CPC (et son angle d'acceptance), pour ne recalculer le capteur que de temps en temps sur le soleil. Ceci peut être fait manuellement en tournant une manivelle et évite un asservissement qui compliquerait et fragiliserait l'ensemble.

On sait qu'une parabole ne focalise les rayons au foyer que s'ils arrivent parallèlement à son axe. Si les rayons, parallèles entre eux, font un angle δ avec l'axe de la parabole (angle appelé **dépointage**), ils ne convergent pas au foyer, mais se coupent en une tache plus ou moins large et plus ou moins éloignée du foyer.

Les calculs suivants permettent de préciser ces notions et de déterminer le bon compromis entre le nombre de recalages journaliers du capteur et l'élargissement du CPC.

Nota :

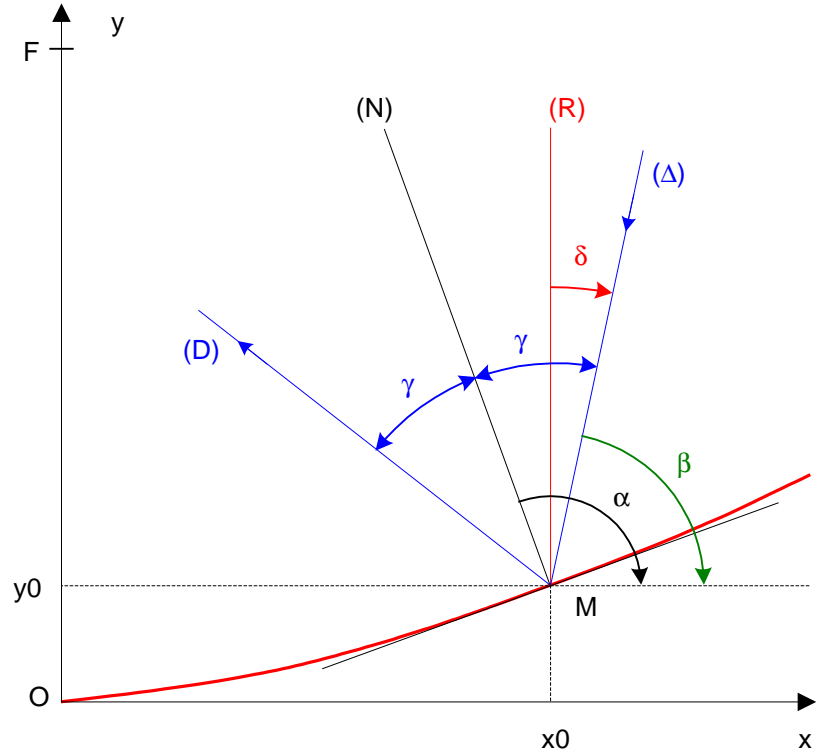
Les calculs suivants, assez complexes, sont effectués pour le midi solaire (tout se passe donc dans un plan orienté sud).

2.3.5.1 Calcul des rayons réfléchis

Sur la figure ci-contre, la droite (N) est la normale au point M de la parabole.

Le point M a pour coordonnées cartésiennes : (x_0, y_0)

La droite (R) représente un rayon parallèle à l'axe de la parabole. Les calculs précédents ont été faits avec de tels rayons qui se réfléchissent au foyer F.



La droite (Δ) représente un rayon incident en M "dépointé" qui fait un angle δ avec l'axe de la parabole. Cette droite fait un angle γ avec la normale en M.

La droite (D) est le rayon réfléchi en M correspondant au rayon incident (Δ) .

Les lois de l'optique géométrique, connues depuis l'antiquité du moins pour la réflexion des rayons, ont été redécouvertes indépendamment par l'anglais Snell en 1621, qui ne les publie pas et par le français Descartes en 1637.

Ces lois indiquent que :

- le rayon incident, la normale à la surface au point d'incidence et le rayon réfléchi sont dans un même plan. (ici (Δ) , (N) et (D) sont dans un même plan.)
- l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Donc l'angle que fait (D) avec (N) est égal à l'angle que fait (Δ) avec (N) ($= \gamma$).

L'équation paramétrique d'une droite passant par un point M (x_0, y_0) est :

$$y - y_0 = m (x - x_0) \quad \text{où } m \text{ est le coefficient directeur} \quad \left(m = \frac{dy}{dx}\right)$$

équation de la parabole : $y = \frac{x^2}{2p}$ d'où $m = \frac{x}{p}$

L'équation de la tangente à la parabole en M est : $y - y_0 = \frac{x_0}{p} (x - x_0)$

L'équation de la normale en M est telle que les coefficients directeurs sont orthogonaux : $m \cdot m' = -1$

soit : $y - y_0 = -\frac{p}{x_0} (x - x_0)$ donc (voir figure) : $\text{tg } \alpha = -\frac{p}{x_0}$

Equation de (Δ) : le coefficient directeur est $b = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right)$ en posant $\beta = \frac{\pi}{2} - \delta$

on a (Δ) : $y - y_0 = \text{tg } \beta (x - x_0)$

Ces calculs ne servent que si l'on veut représenter graphiquement ces droites.

2.3.5.1.1 Equation de (D)

Le coefficient directeur est $c = \text{tg} (\gamma + \alpha)$ mais $\gamma = \alpha - \beta = \alpha + \delta - \frac{\pi}{2}$

d'où : $\gamma + \alpha = 2\alpha + \delta - \frac{\pi}{2}$ et $\text{tg} (\gamma + \alpha) = \text{tg} \left(2\alpha + \delta - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\text{tg}(2\alpha + \delta)}$

En développant $\text{tg} (2\alpha + \delta)$, on a : $\text{tg} (2\alpha + \delta) = \frac{\text{tg } 2\alpha + \text{tg } \delta}{1 - \text{tg } 2\alpha \text{ tg } \delta}$

mais $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$ donc $\text{tg} (2\alpha + \delta) = \frac{2 \text{tg } \alpha + \text{tg } \delta (1 - \text{tg}^2 \alpha)}{1 - \text{tg}^2 \alpha - 2 \text{tg } \alpha \text{ tg } \delta}$

soit $c = \frac{2 \text{tg } \alpha \text{ tg } \delta - (1 - \text{tg}^2 \alpha)}{2 \text{tg } \alpha + \text{tg } \delta (1 - \text{tg}^2 \alpha)}$ en posant $k = \text{tg } \delta$ et en remplaçant $\text{tg } \alpha$ par : $-\frac{p}{x_0}$

on a : $c = \frac{-2 \frac{p}{x_0} k - (1 - \frac{p^2}{x_0^2})}{-2 \frac{p}{x_0} + k (1 - \frac{p^2}{x_0^2})} = \frac{-2 p x_0 k - x_0^2 + p^2}{-2 p x_0 + k (x_0^2 - p^2)}$ soit $c = \frac{p^2 - x_0^2 - 2 k p x_0}{k (x_0^2 - p^2) - 2 p x_0}$

d'où l'équation de (D) : $y - y_0 = \frac{p^2 - x_0^2 - 2 k p x_0}{k (x_0^2 - p^2) - 2 p x_0} (x - x_0)$

où sous une forme canonique : $u(x_0) x + v(x_0) y + w(x_0) = 0$

$(2kpx_0 + x_0^2 - p^2) x + (k(x_0^2 - p^2) - 2px_0) y + 2kpx_0^2 + x_0^3 - p^2 x_0 - ky_0 (x_0^2 - p^2) + 2 px_0 y_0 = 0$

en notant que $2 p y_0 = x_0^2$ (équation de la parabole), on a $w(x_0) = p^2 x_0 - k x_0^2 (x_0^2 - p^2 + 4p^2)/2p$

en réarrangeant les termes en puissance de x_0 :

$$u(x_0) = x_0^2 + 2 k p x_0 - p^2$$

$$v(x_0) = k x_0^2 - 2 p x_0 - k p^2$$

$$w(x_0) = -\frac{k}{2p} x_0^4 - \frac{3kp}{2} x_0^2 + p^2 x_0$$

2.3.5.1.2 Lieu des droites (D)

Le lieu des droites (D) est l'enveloppe de la famille des droites (D) de paramètre x_0 .

La courbe enveloppe (ζ) est déterminée par l'équation paramétrique :

$$\begin{aligned}
 x &= \varphi(x_0) & \text{avec} & \quad \varphi(x_0) = \frac{v w' - w v'}{u v' - v u'} \\
 y &= \psi(x_0) & \text{et} & \quad \psi(x_0) = \frac{w u' - u w'}{u v' - v u'} \\
 \\
 u &= x_0^2 + 2 k p x_0 - p^2 & u' &= 2(x_0 + k p) \\
 v &= k x_0^2 - 2 p x_0 - k p^2 & v' &= 2(k x_0 - p) \\
 w &= -\frac{k}{2p} x_0^4 - \frac{3kp}{2} x_0^2 + p^2 x_0 & w' &= -k x_0 \left(\frac{2x_0^2}{p} + 3 p \right) + p^2
 \end{aligned}$$

ce qui donne, après réduction :

$$\begin{aligned}
 v w' - w v' &= k (x_0^2 + p^2) \left(-\frac{k}{p} x_0^3 + 3 x_0^2 + 3 k p x_0 - p^2 \right) \\
 v w' - w v' &= (x_0^2 + p^2) \left(\frac{k}{p} x_0^3 + 3 k^2 x_0^2 - 3 k p x_0 + p^2 \right) \\
 u v' - v u' &= 2p (x_0^2 + p^2) (1 + k^2)
 \end{aligned}$$

D'où les fonctions :

$$\begin{aligned}
 x &= \varphi(x_0) = \frac{k}{1+k^2} \left[\frac{x_0^2 (3p - kx_0) + p^2 (3kx_0 - p)}{2p^2} \right] \\
 y &= \psi(x_0) = \frac{1}{1+k^2} \left[\frac{kx_0^2 (3kp + x_0) - p^2 (3kx_0 - p)}{2p^2} \right]
 \end{aligned}$$

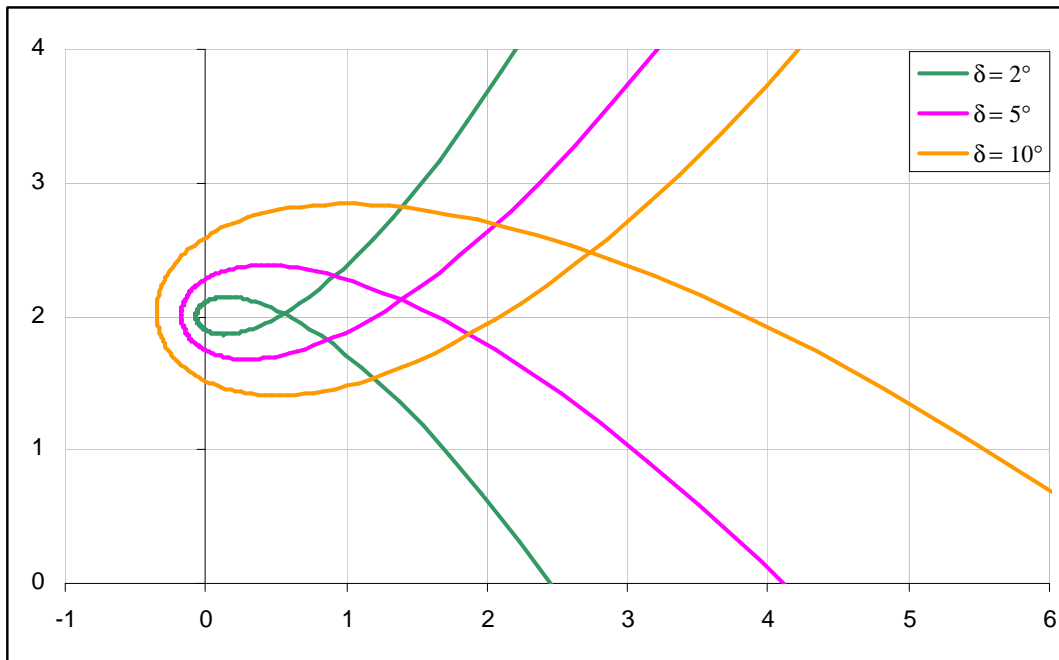
Remarque :

Dans le cas particulier où $k = 0$ (soit $\delta = 0$, c'est à dire que les rayons incidents sont parallèles à l'axe de la parabole), on a : $x = 0$ et $y = p / 2$, quelque soit la valeur de x_0 donc les droites convergent toutes en ce point (foyer de la parabole).

On a donc démontré au passage que des rayons incidents parallèles à l'axe d'une parabole convergent en un point qui est le foyer de cette parabole.

L'allure générale de cette courbe enveloppe (ζ) est donnée par le graphique ci-dessous. Si l'angle de dépointage δ augmente, la dispersion augmente.

La courbe, du type cissoïde, forme une boucle qui entoure le foyer (point (0-2) sur le graphique).



Au lieu de calculer la courbe enveloppe (ζ) en fonction de x_0 , il est plus commode d'utiliser l'angle θ comme paramètre (angle entre un point du miroir vu du foyer et l'axe de la parabole).

Il faut alors remplacer x_0 par son expression : $x_0 = p \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$,

ou en fonction de l'angle moitié : $x_0 = p \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ et en posant pour simplifier l'écriture : $t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$

ce qui donne $x_0 = p t$

Les expressions de la courbe enveloppe deviennent :

$$x = \varphi(t) = \frac{p}{2} \frac{k}{(1+k^2)} [t^2(3-kt) + (3kt-1)] = \frac{kp}{2(1+k^2)} [3t^2 - (1-3kt + kt^3)]$$

$$y = \psi(t) = \frac{p}{2} \frac{1}{(1+k^2)} [kt^2(3k+t) - (3kt-1)] = \frac{p}{2(1+k^2)} [3k^2t^2 + (1-3kt + kt^3)]$$

ou en posant : $K = \frac{p}{2} \frac{1}{(1+k^2)}$

avec $k = \operatorname{tg} \delta$ et $t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$

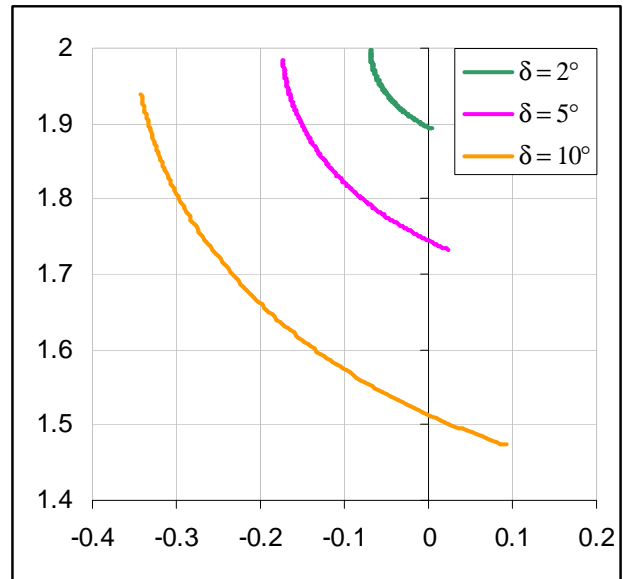
on obtient :

$$x = \varphi(t) = k K [3t^2 - (1 - 3kt + kt^3)]$$

et :

$$y = \psi(t) = K [3k^2t^2 + (1 - 3kt + kt^3)]$$

Le graphique ci-contre montre la portion de la courbe enveloppe (ζ) pour des angles du miroir allant de $\theta_{\min} = 0$ à $\theta_{\max} = 60$ degrés (voir §2.3.4.5) pour les mêmes valeurs de dépointage que ceux du graphique précédent.



2.3.5.2 Calcul du déplacement de la tache solaire pour un dépointage donné

Le point extrême, pour un dépointage donné, est donné par I, intersection des droites (D1) et (D2) tangentes à la courbe enveloppe (ζ). Ces deux droites représentent les rayons réfléchis rive nord et rive sud du miroir, correspondant respectivement aux angles θ_{\min} et θ_{\max} .

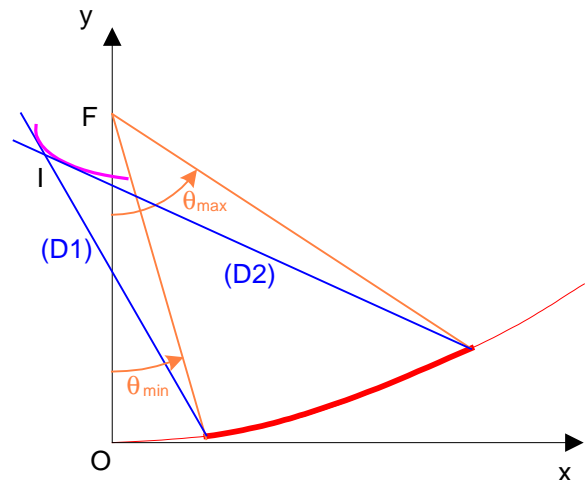
La courbe enveloppe est donnée par son équation paramétrique : $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$.

L'équation d'une tangente à (ζ) est :

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} \quad (1)$$

avec : $x(t) = k K [3 t^2 - (1 - 3 k t + k t^3)]$
d'où : $x'(t) = k K [6 t + 3 k - 3k t^2]$
soit : $x'(t) = 3 k K [-k t^2 + 2 t + k]$

et $y(t) = K [3k^2 t^2 + (1 - 3 k t + k t^3)]$ d'où : $y'(t) = K [6k^2 t - 3 k + 3k t^2]$
soit : $y'(t) = 3 k K [t^2 + 2 k t - 1]$



L'équation (1) peut se mettre sous la forme : $Y = a X + b$ avec $a = \frac{y'}{x'}$ et $b = y - \frac{y'}{x'} x$

on a donc :
$$a = \frac{t^2 + 2kt - 1}{-kt^2 + 2t + k}$$

et :
$$b = K [3k^2t^2 + (1 - 3kt + kt^3)] - \frac{t^2 + 2kt - 1}{-kt^2 + 2t + k} k K [3t^2 - (1 - 3kt + kt^3)]$$

soit
$$b = K [3k^2t^2 + Z] \frac{-kt^2 + 2t + k}{-kt^2 + 2t + k} - \frac{t^2 + 2kt - 1}{-kt^2 + 2t + k} k K [3t^2 - Z] \quad \text{avec } Z = 1 - 3kt + kt^3$$

après simplification :
$$b = p \frac{t[-kt^3 - 3kt + 2]}{2[-kt^2 + 2t + k]}$$

La droite (D1) a donc pour équation :
$$Y = a_1 X + b_1 \quad \text{avec } a_1 = a \text{ pour } t = t_1 = \text{tg} \frac{\theta_{\min}}{2}$$

 et
$$b_1 = b \text{ pour } t = t_1$$

De même, (D2) a pour équation :
$$Y = a_2 X + b_2 \quad \text{avec } a_2 = a \text{ pour } t = t_2 = \text{tg} \frac{\theta_{\max}}{2}$$

 et
$$b_2 = b \text{ pour } t = t_2$$

Le point I, intersection de ces 2 droites, a pour coordonnées (X_I, Y_I) telles que :

$$X_I = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

$$Y_I = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}$$

Remarque

Ces coordonnées sont directement proportionnelles à la focale du miroir (par l'intermédiaire de b).

Si l'on tient compte du diamètre apparent du disque solaire (γ), pour un dépointage donné de $\pm\delta$, les points I extrêmes sont obtenus pour les angles $(\delta + \gamma)$ d'un côté et $(-\delta - \gamma)$ de l'autre côté.

A I_1 correspond l'angle $(\delta + \gamma)$, ce qui donne pour k la valeur $k_1 = \text{tg}(\delta + \gamma)$
 et pour I_2 , l'angle $(-\delta - \gamma)$, ce qui donne la valeur $k_2 = \text{tg}(-\delta - \gamma) = -\text{tg}(\delta + \gamma) = -k_1$

A ce stade le calcul analytique n'apporte plus de simplification : les formules donnant les coordonnées de I_1 et de I_2 en fonction de t_1 et de t_2 sont trop complexes.

Le calcul du déplacement de la tache focale pour un dépointage donné de $\pm\delta$ peut être mené par la procédure suivante :

Pour un miroir de caractéristiques θ_{\min} , θ_{\max} et p, et pour un dépointage maximum $\pm\delta$,

on calcule : $k = \text{tg}(\delta + \gamma)$

et
$$t_1 = \text{tg} \frac{\theta_{\min}}{2} \quad \text{puis} \quad b_1 = p \frac{t_1[-kt_1^3 - 3kt_1 + 2]}{2[-kt_1^2 + 2t_1 + k]} \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{t_1^2 + 2kt_1 - 1}{-kt_1^2 + 2t_1 + k}$$

et
$$t_2 = \text{tg} \frac{\theta_{\max}}{2} \quad \text{puis} \quad b_2 = p \frac{t_2[-kt_2^3 - 3kt_2 + 2]}{2[-kt_2^2 + 2t_2 + k]} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{t_2^2 + 2kt_2 - 1}{-kt_2^2 + 2t_2 + k}$$

et enfin I_1 :
$$X_{I1} = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \quad Y_{I1} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}$$

On change ensuite k en $-k$ et on recommence ces calculs pour trouver les coordonnées de I_2 .

La largeur du déplacement maximum est donnée par le segment de droite $\overline{I_1 I_2}$ tel que :

$$\overline{I_1 I_2} = \sqrt{(X_{I1} - X_{I2})^2 + (Y_{I1} - Y_{I2})^2}$$

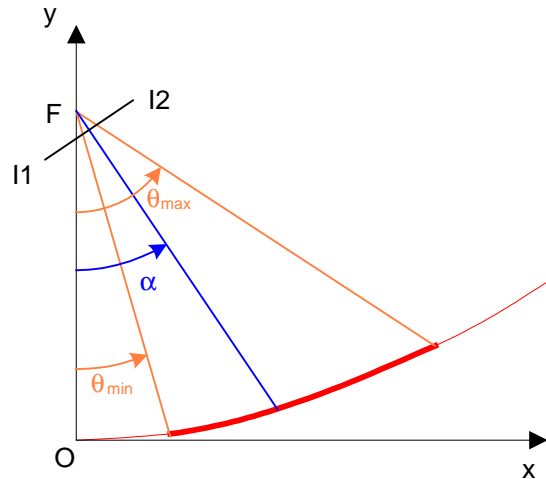
Le milieu de $\overline{I_1 I_2}$ est $I_0 (X_{I0}, Y_{I0})$ avec :

$$X_{I0} = \frac{X_{I1} + X_{I2}}{2}$$

$$Y_{I0} = \frac{Y_{I1} + Y_{I2}}{2}$$

et l'angle de la normale au segment $\overline{I_1 I_2}$ est :

$$\alpha = \text{Arctg} \frac{Y_{I2} - Y_{I1}}{X_{I2} - X_{I1}}$$



Remarque

Un calcul numérique montre que cet angle α est le même que l'angle β_0 défini au §2.3.4.2 par la formule :

$$\text{tg } \beta_0 = \frac{k_2 \cos \theta_{\max} - k_1 \cos \theta_{\min}}{k_1 \sin \theta_{\min} - k_2 \sin \theta_{\max}} \quad \text{avec } k_1 = (1 + \cos \theta_{\min}) \text{ et } k_2 = (1 + \cos \theta_{\max})$$

C'est l'angle qui minimise la largeur de la tache focale à midi.

2.3.5.3 Géométrie de la défocalisation